Khôlle 1 **Eléments de réponse**

Sujet 1

Ex1 Calculer $S = \sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2)$

$$S = \sum_{k=1}^{n} 7^k + \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} -n+2$$

$$= \frac{1-7^{n+1}}{1-7} - 1 + \frac{4n(n+1)}{2} + n(-n+2)$$

$$= \frac{7-7^{n+1}}{-6} + n(2n+2-n+2) = \frac{7}{6}\times 7^n - 1 + n^2 + 4n$$

Ex2 Calculer $P = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{2k-1}$ $\qquad P = \frac{3\times 5\times \ldots \times (2n+3)}{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)}$ = 2n+3

Ex3 Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$. On pose pour tout p ∈ $\mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$

a) Exprimer la somme $A = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4

$$A = \sum_{1}^{n}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1) = S_4+4S_3+6S_2+4S_1+n$$

b) A l'aide d'un changement d'indice, exprimer A en fonction de S_4 et de n uniquement

$A = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4$ on pose K = k+1 donc $A = \sum_{K=2}^{n+1} K^4 = \sum_{K=1}^{n} K^4 - 1 + (n+1)^4 = S_4 - 1 + (n+1)^4$

c) En déduire le calcul de la somme S_3

d'où $S_4 - 1 + (n+1)^4 = S_4+4S_3+6S_2+4S_1+n$ **ce qui donne** $4S_3 = -1+(n+1)^4-6S_2-4S_1-n$

on utilise alors les valeurs connues de S_2 et S_1 pour conclure

Ex4 Calculer, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, la somme double $S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j}$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\cancel{j}}\frac{\cancel{j}(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

Sujet 2

Exercices

Ex1 Calculer $S_n = \sum_{i=n}^{2n}(i+1+n)$

On écrit $S_n = \sum_{i=n}^{2n} i + \sum_{i=n}^{2n} 1+n = \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n-1} i + (2n-(n-1))(1+n)$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + (n+1)(n+1)$$

$$= \dots = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

Ex2 Simplifier S = $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\ k$ et P = $\prod_{k=1}^{n} e^k$

S = $-1+2-3+\ldots+(-1)^{2n} 2n = -1-3-\ldots-(2n-1) + 2+4+6+\ldots+2n$

$= -(1+2+3+\ldots+2n) + 2\times(2+4+\ldots+2n) = -\frac{2n(2n+1)}{2} + 4\times\frac{n(n+1)}{2}$

S = ... = n

D'après les règles des exponentielles, il est facile d'obtenir P = $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Ex3 On cherche à calculer $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$

a) Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$. Donner l'expression de $f_n(x)$ puis de $f_n{}'(x)$

Pour x ≠ 1 , $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

b) Calculer $x\times f'_n(x)$ et en déduire l'expression de $S_n(x)$ en fonction de x

$x\times f'_n(x) = x\times\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = S_n(x)$

or $f'_n(x) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$ d'où

$S_n(x) = \frac{-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + x}{(1-x)^2}$

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$

$S_n(2) = \frac{-(n+1)2^{n+1} + n\,2^{n+2} + 2}{(1-2)^2} = 2^{n+1}(-n-1+2n)+2 = (n-1)2^{n+1}+2$

Ex4 Calculer S= $\sum_{k=1}^{100} |50-k|$

S = $\sum_{k=1}^{50} |50-k| + \sum_{k=51}^{100} |50-k| = \sum_{k=1}^{50} 50-k + \sum_{k=51}^{100} -(50-k)$

$= 49+48+\ldots+1+0 + 1+2+\ldots+50 = \frac{49\times50}{2} + \frac{50\times51}{2} = 2500$

SUJET 3

Ex1 Calculer S= $\sum_{k=1}^{100} |50-k|$

S = $\sum_{k=1}^{50} |50-k| + \sum_{k=51}^{100} |50-k| = \sum_{k=1}^{50} 50-k + \sum_{k=51}^{100} -(50-k)$

$= 49+48+\ldots+1+0 + 1+2+\ldots+50 = \frac{49\times50}{2} + \frac{50\times51}{2} = 2500$

Ex2 Calculer, pour tout entier n, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ (on pourra penser au binome de newton)

On reconnaît la formule du binome de Newton avec a= 2 et b = 1 donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k * 1^{n-k} = (2+1)^k = 3^k$$

Ex3 a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (n+k) = \frac{1}{4n+2} \prod_{p=1}^{n+1} (n+1+p)$

$$\prod_{k=1}^{n} (n+k) = (n+1)\dots(n+n) = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \prod_{p=1}^{n+1} (n+1+p) = \frac{1}{4n+2} \prod_{p=1}^{n+1} (n+1+p)$$

b) pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, montrer alors, par récurrence, que $\prod_{k=1}^{n} 4k-2 = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$

initialisation

n = 1 $\prod_{k=1}^{1} 4k-2 = 2$ et $\prod_{k=1}^{1} (1+k) = 2$ relation vraie

SQ $\prod_{k=1}^{n} 4k-2 = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$ et DQ $\prod_{k=1}^{n+1} 4k-2 = \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k)$

$\prod_{k=1}^{n+1} 4k-2 = (4(n+1)-2) \prod_{k=1}^{n} 4k-2$ *(hyp récur)* $= (4n+2) \prod_{k=1}^{n} (n+k) =$ *(question a)* (4n+2)

$\frac{1}{4n+2} \prod_{p=1}^{n+1} (n+1+p) = \prod_{p=1}^{n+1} (n+1+p)$ CQFD

Ex4 a) Soit a et b deux réels. On définit

$$min(a,b) = \begin{cases} b & si\ a \geq b \\ a & si\ b \geq a \end{cases} \quad \text{et} \quad max(a,b) = \begin{cases} b & si\ a \leq b \\ a & si\ b \leq a \end{cases}$$

Calculer, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} min(i,j)$

Par le théorème Fubini, on a $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$. Fixons i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i$$

On a donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i+2ni-2i^2) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + (2n+1)\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n+1)n(n+1)}{2}\right) = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

b) Vérifier la formule pour n = 2

Vérifions la formule pour $n = 2$. On a

$$S_2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \min(i,j) = \min(1,1) + \min(1,2) + \min(2,1) + \min(2,2) = 1+1+1+2 = 5$$

La formule donne $\frac{2 \times 3 \times 5}{6} = 5$ ✓