Parlons fonctions

C.1

(1) La droite d'équation $x=1$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1\,;0{,}5)$. On en déduit que l'image de 1 est 0,5 : $f(1)=0{,}5$

(2) La droite d'équation $y=1{,}25$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points de coordonnées $(-1\,;1{,}25)$ et $(0{,}25\,;1{,}25)$. On en déduit que les antécédents de 1,25 sont : -1 et $0{,}25$

C.2

(1) (a) La droite $x=-3$ intercepte la courbe au point de coordonnées $(-3\,;1{,}5)$: l'image de -3 par la fonction f est 1,5.

(b) La droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$: l'image de $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction f est 0.

(c) La droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$: l'image de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f est 2.

(d) La droite d'équation $x=0$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $(0\,;1)$: l'image de 0 par la fonction f est 1.

(2) (a) La droite d'équation $y=3$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'intersection $(1\,;3)$: le nombre 3 admet pour unique antécédent le nombre 1.

(b) L'ensemble des antécédents du nombre -1 est :
$\{-2\ ;\ -1\}$

(c) La droite d'équation $y=-2$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}$: le nombre -2 n'admet d'antécédents.

C.3

(1)
- La droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-2$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnée $(-2\,;-2{,}25)$:

"*L'image de -2 par la fonction f est le nombre $-2{,}25$*"

- La droite d'équation $x=2$ intercepte la courbe représentative de la fonction f au point de coordonnée $(2\,;1{,}5)$; on en déduit la valeur de l'image de 2 par la fonction f : $f:2\longmapsto 1{,}5$

(2)
- On ne peut calculer l'image du nombre $-1{,}5$ car la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-1{,}5$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
- De même, la droite d'équation $x=5{,}5$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$: le nombre 5,5 n'a pas d'image par la fonction f.

(3) L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f=\big[-5\,;-2\big]\cup\big[-1\,;5\big]$

C.4

(1) L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f=\big[-6\,;-3\big[\cup\big]-1{,}5\,;1{,}5\big]$

(2) (a) La droite d'équation $x=0$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(0\,;-1{,}5)$.
L'image de 0 est $-1{,}5$: $f(0)=-1{,}5$

(b) La droite d'équation $y=-1$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points de coordonnées $(-0{,}5\,;-1)$ et $(0{,}5\,;-1)$; l'ensemble des antécédents est :
$\mathcal{S}=\{-0{,}5\,;0{,}5\}$

C.5

(a) L'ensemble de définition de la fonction définie par la courbe représentative est $]-5\,;5]$

(b) Tous les nombres compris entre -5 et 4 *(exclu)* admettent une image à l'aide de cette courbe représentative. Ainsi, on a :
$\mathcal{D}=[-5\,;4[$.

(c) On a : $\mathcal{D}=[-5\,;5]$

(d) L'ensemble de définition de cette fonction est constitué de la réunion de deux intervalles :
$\mathcal{D}=\big[-5\,;-1\big]\cup\big]1\,;4\big[$

C.6

(1) L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\big[-4\,;4\big[$

(2) (a) $f\Big(\big[-4\,;-2\big]\Big)=\big[-2\,;2\big]$

(b) $f\Big(\big[-1\,;2\big]\Big)=\big[-3\,;2\big]$

(c) $f\Big(\big[2\,;3\big]\Big)=\big[1\,;2\big]$

(3) (a) $f\Big(\big[-2\,;0\big]\Big)=\big[-3\,;-1\big]$

(b) $f\Big(\big[0\,;4\big]\Big)=\big[-1\,;2\big]$

(c) $f\Big(\big[-2\,;3\big]\Big)=\big[-3\,;2\big]$

C.7

(a) $f(x)=\dfrac{10-2\times2}{3\times2}=\dfrac{10-4}{6}=\dfrac{6}{6}$

(b) $g(x)=2^2-2\times2+1=4-4+1=1$

C.8

(a) Les antécédents du nombre 4 par la fonction h est l'ensemble des nombres x dont l'image du nombre 4 par la fonction h vaut 4. Ce nombre x vérifie :

$$\begin{aligned} h(x) &= 4\\ 3\cdot x-5 &= 4\\ 3\cdot x &= 4+5\\ 3\cdot x &= 9\\ x &= \frac{9}{3}\\ x &= 3 \end{aligned}$$

La fonction h admet un unique antécédent au nombre 4 : c'est 3.

(b) Les antécédents du nombre 4 par la fonction j est l'ensemble des nombres x dont l'image du nombre 4 par la fonction j vaut 4. Ce nombre x vérifie :

$$j(x)=4$$
$$x^2=4$$
$$x^2-4=0$$
$$x^2-2^2=0$$
$$\big(x+2\big)\big(x-2\big)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+2=0$	$x-2=0$
$x=-2$	$x=2$

La fonction h admet un pour antécédent du nombre 4 les deux nombres -2 et 2.

C.9

- le point $\big(-2\,;-21\big)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$ car :
$f(-2)=3\times(-2)^2+4\times(-2)-1=3\times4-8-1$
$=12-8-1=3$
- le point $\big(-1\,;-2\big)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ car :
$f(-1)=3\times(-1)^2+4\times(-1)-1=3\times1-4-1$
$=3-4-1=-2$
- le point $\big(0\,;6\big)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$ car :
$f(0)=3\times0^2+4\times0-1=0+0-1=-1$
- le point $\big(1\,;12\big)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$ car :
$f(1)=3\times1^2+4\times1-1=3\times1+4-1=3+4-1=6$
- le point $\big(2\,;19\big)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ car :
$f(2)=3\times2^2+4\times2-1=3\times4+8-1=12+8-1=19$

C.10

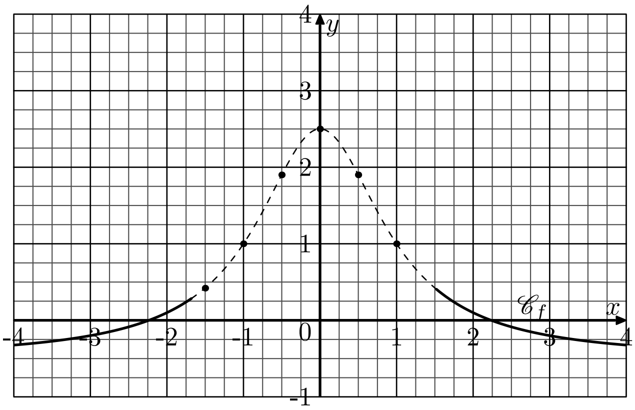
- L'image du nombre 2 par la fonction f a pour valeur :
$$f(2)=\frac{3\times2}{2\times2-3}=\frac{6}{4-3}=\frac{6}{1}=6$$
Ainsi, le point A de coordonnées $\big(2\,;2\big)$ n'appartient à la courbe représentative de la fonction f.
- L'imge du nombre 0,5 par la fonction f a pour valeur :
$$f(0{,}5)=\frac{3\times0{,}5}{2\times0{,}5-3}=\frac{1{,}5}{1-3}=\frac{1{,}5}{-2}=-\frac{3}{4}=-0{,}75$$
Ainsi, le point B de coordonnées $\big(0{,}5\,;-0{,}75\big)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

C.11

1. Voici le tableau complété :

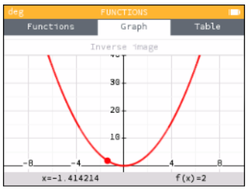
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$f(x)$	0,4	1	1,9	2,5	1,9	1

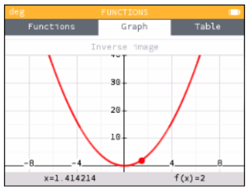
Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$:



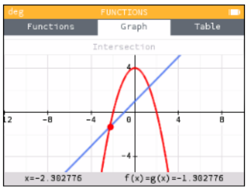
C.12

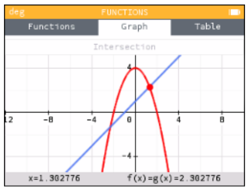
1. b. Le nombre 2 admet deux antécédents par la fonction f :
$x_1\approx-1{,}41$; $x_2\approx1{,}41$





2. Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ s'interceptent en deux points dont les coordonnées arrondies au dixième près sont :
$\big(-2{,}3\,;-1{,}3\big)$; $\big(1{,}3\,;2{,}3\big)$





C.13

1. La droite d'équation $y=1{,}5$, parallèle à l'axe des abscisses, intercepte la courbe aux points de coordonnées :
$(2\,;1{,}5)$; $(3\,;1{,}5)$; $(5{,}5\,;1{,}5)$; $(6{,}5\,;1{,}5)$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=1{,}5$ est :
$\mathcal{S}=\big\{2\,;\,3\,;\,5{,}5\,;\,6{,}5\big\}$
2. La droite d'équation $y=4$ intercepte le seul point d'intersection $(4{,}5\,;4)$; ainsi, l'équation $f(x)=4$ admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\big\{4{,}5\big\}$.

C.14

1. La droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y=-1$ intercepte la courbe en deux points dont les abscisses sont respectivement 0 et 3,5.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=-1$ est :
$\mathcal{S}=\big\{0\,;\,3{,}5\big\}$.
2. Pour déterminer les antécédents de 1, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=1$ qui intercepte la courbe en trois points : deux points ont pour abscisses -3 et -2 alors que l'abscisse du troisième, ne pouvant être déterminer précisément, a une valeur approchée de $-1{,}2$.
L'équation $f(x)=1$ a pour ensemble des solutions est :
$\mathcal{S}=\big\{-3\,;\,-2\,;\,\alpha\big\}$ où $\alpha\approx-1{,}2$

C.15

1. a. $f(4)=\dfrac{4^2-3\times4+2}{2\times4}=\dfrac{16-12+2}{8}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$
L'image du nombre 1 par la fonction f est $\dfrac{3}{4}$.
b. $g(4)=2^4=2\times2\times2\times2=16$
L'image du nombre 4 par la fonction g est 16.
c. $h(4)=\sqrt{4+\sqrt{7\times4-3}}=\sqrt{4+\sqrt{28-3}}$
$=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$
L'image du nombre 4 par la fonction h est 3.
d. Pour déterminer facilement l'image du nombre 4 par la fonction j, commençons par observer la manipulation algébrique suivante :

$$j(x)=\frac{(6x-3)^2}{-36x^2+36x-9}=\frac{(6x-3)^2}{-(36x^2-36x+9)}$$
$$=\frac{(6x-3)^2}{-(6x-3)^2}=\frac{1}{-1}=-1$$

On en déduit : $j(4)=-1$.

On remarquera que la fonction j est constante sur son ensemble de définition : $\mathcal{D}_j=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

2 a Un antécédent x du nombre $\frac{1}{2}$ par la fonction k doit vérifier l'équation suivante :

$$k(x)=\frac{1}{2}$$
$$4x-5=\frac{1}{2}$$
$$4x=\frac{1}{2}+5$$
$$4x=\frac{11}{2}$$
$$x=\frac{\frac{11}{2}}{4}$$
$$x=\frac{11}{2\times4}$$
$$x=\frac{11}{8}$$

L'ensemble des antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction k est $\left\{\frac{11}{8}\right\}$.

b Chercher les antécédents du nombre -1 par la fonction ℓ revient à résoudre l'équation suivante :

$$\ell(x)=-1$$
$$9x^2-6x=-1$$
$$9x^2-6x+1=0$$
$$(3x-1)^2=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$3x-1=0$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}$$

L'ensemble des antécédent du nombre -1 par la fonction ℓ est $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

C.16

1 a La fonction $Y1$ a pour expression :

$$x\longmapsto\frac{\sqrt{1+\sqrt{3-x}}}{\sqrt{x}}+3$$

b La fonction $Y2$ a pour expression :

$$x\longmapsto\frac{3x-2}{2\sqrt{x}+1}$$

c La fonction $Y3$ a pour expression :

$$x\longmapsto\sqrt{3+x}\cdot(2-x)$$

2 a `f(x)=(1+(3+x)/x)/(2-3x)`

b `g(x)=√((1-2x)*(3x-1))`

c `h(x)=√(x+1)/(√(x)+1)`

C.17

1 Voici les trois fonctions qui au nombre -2 associe l'image souhaitée :

- $j(-2)=\frac{6-3\times(-2)}{-1+(-2)^2}=\frac{6+6}{-1+4}=\frac{12}{3}=4$
- $h(-2)=\sqrt{9-8\times(-2)}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
- $g(-2)=(-2)^2-2\times(-2)+3=4+4+3=11$

2 Déterminons les antécédents du nombre 3 par ces fonctions :

- $\ell(x)=3$
$$2-3{\cdot}x=3$$
$$-3{\cdot}x=3-2$$
$$-3{\cdot}x=1$$
$$x=\frac{1}{-3}$$
$$x=-\frac{1}{3}$$
$-\frac{1}{3}$ est l'antécédent du nombre 3 par la fonction ℓ.

- $m(x)=3$
$$\frac{3-2{\cdot}x}{1+2{\cdot}x}=3$$
$$\frac{3-2{\cdot}x}{1+2{\cdot}x}=\frac{3}{1}$$
D'après le produit en croix :
$$\big(3-2{\cdot}x\big)\times1=\big(1+2{\cdot}x\big)\times3$$
$$3-2{\cdot}x=3+6{\cdot}x$$
$$-2{\cdot}x-6{\cdot}x=3-3$$
$$-8{\cdot}x=0$$
$$x=\frac{0}{-8}$$
$$x=0$$
0 est l'antécédent du nombre 3 par la fonction m.

- $n(x)=3$
$$12-x^2=3$$
$$12-x^2-3=0$$
$$9-x^2=0$$
$$3^2-x^2=0$$
En reconnaissant la 3^e identité remarquable :
$$\big(3+x\big)\big(3-x\big)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$$3+x=0 \qquad 3-x=0$$
$$x=-3 \qquad -x=-3$$
$$x=3$$
Ainsi, -3 et 3 sont les deux antécédents du nombre 3 par la fonction n.