<u>SUJET 1</u> Obligatoire

<u>Exercice 1 :</u> Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. La fonction $x \longmapsto 2-2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction expo donc f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=-(-2e^{2-2x}) = 2e^{2-2x}$

   $f'(x)+2f(x) = 2e^{2-2x}+2\times(-e^{2-2x}) = 0$ donc VRAI

2. $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x = 0$

   La fonction g est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0 donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

   $$g'(x)=-\frac{u'}{u^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} \neq -\frac{1}{(e^x-1)^2}$$ donc FAUX

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}\ln x = -\infty$ on est sur 0 + car ln défini sur $\mathbb{R}^*+$

   $\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0^{+.}$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x} = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}\ln x = +\infty$

<u>Exercice 2 :</u>

$$Z = \frac{6+2i}{-1+3i} = \frac{(6+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-6-18i-2i+6}{1+9} = -2i \quad \{\text{ forme algébrique }\}$$

$$= 2e^{-i\pi/2} \quad \{\text{ forme exponentielle }\}$$

SUJET 2 Obligatoire

Exercice 1 :

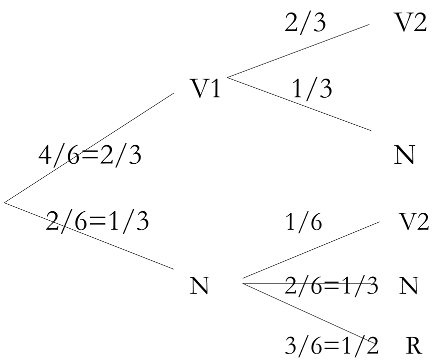
On dispose de deux dés cubiques A et B équilibrés présentant :

- dé A : quatre faces vertes et deux faces noires.
- dé B : une face verte , deux faces noires , trois faces rouges

Un jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé A

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé A et on note la couleur de la face obtenue
- si la face obtenue est noire, on lance le dé B et on note la couleur de la face obtenue

1) Construire un arbre de probabilité traduisant cette situation



2) On cherche $p(V1 \cap V2) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Il y a deux façons d'obtenir une face verte au deuxième lancer $V2 = (V1 \cap V2) \cup (N \cap V2)$

Les événements $(V1 \cap V2)$ et $(N \cap V2)$ étant incompatibles ou disjoints, on a alors :

$$p(V2) = p(V1 \cap V2) + p(N \cap V2) = \frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{8}{18}+\frac{1}{18} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 :

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f définie par $f(x) = x - x \ln x$

f est définie sur $]0;+\infty[$ et est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables donc dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = 1 - \left(1\times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

on sait que pour tout $x \in]0;1]$, $\ln x \leq 0$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\ln x \geq 0$ donc pour tout x ∈]0;1], $f'(x) \geq 0$ et f est croissante et pour tout x ∈ [1;+∞[, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

$f(x) = x(1-\ln x)$ $\lim_{x \to +\infty} 1-\ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

on sait que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

x	0		1		+∞
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	1	↘	–∞

<u>SUJET 3</u> OBLIGATOIRE

<u>Exercice 1 :</u>

Soit f la fonction définie sur]0;1] par f(x) = $\ln(2x) + 1 - x$

f dérivable sur]0;1] et on a $f'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

comme x ∈]0;1], x > 0 et 1 – x ≥ 0 donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur]0;1]

f(1) = ln2 et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ d'où

x	0		1
f '(x)		+	
f(x)	–∞	↗	ln2

La fonction f est continue et strictement croissante sur]0;1] et on a $f(]0;1]) =]-\infty;\ln 2]$

Comme ln2 ≈ 0,69 , on a 0 ∈]–∞;ln2]. D'après le th de la bijection, il existe un unique α ∈]0;1] tel que f(x)=0

En donner une valeur approchée à 10^{-1} près $\alpha \approx 0,2$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) $u_1+u_2+u_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$

b) Soit (S_n) la suite définie par

$$S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$$

SUJET 4 OBLIGATOIRE

Exercice 1 :

a) Démontrer que la fonction f définie par f(x) = $x \ln x - x$ est une primitive de la fonction g définie par g(x) = $\ln x$ facile on dérive f et on tombe sur g

b) Calculer $\int_1^2 3\ln x + \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[3f(x)+\frac{1}{2}\times\ln(x^2+1)\right]_1^2 = 3f(2)+\frac{1}{2}\times\ln 5 - 3f(1) - \frac{1}{2}\times\ln(2) =$

$$3(2\ln 2-2)+\frac{\ln 5}{2}+3-\frac{\ln 2}{2} = \frac{11\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{2}-3$$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

1) $u_{n+1} - u_n = 2n+3 > 0$ car n est un entier naturel donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite est croissante

2) a) initialisation n = 0 $u_0 = 1 > 0^2$ relation vraie au rang 0

supposons qu'il existe un entier n tq $u_n > n^2$ et démontrons que $u_{n+1} > (n+1)^2$

$u_n > n^2$ donc $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$ d'où $u_{n+1} > (n+1)^2$ et on finit la récurrence

b) On sait que $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc comme $u_n > n^2$, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 3 = 4 = 2^2$, $u_2 = u_1 + 5 = 9 = 3^2$, $u_3 = u_2 + 7 = 16 = 4^2$

On peut conjecturer que $u_n = (n+1)^2$