



Exercice 1 :

- * Etude d'une fonction en exponentielle
- * Calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles
- * Algorithmique

Exercice 2 : QCM sur les nombres complexes et la géométrie dans l'espace

Exercice 3 :

- * Probabilité conditionnelle
- * Evénements indépendants
- * Intervalle de fluctuation asymptotique
- * loi normale

Exercice 4 : Pour les non spécialistes

- * Suites numériques

Exercice 4 : Pour les spécialistes

- * Suites et Matrices

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec les axes du repère
- b) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe \mathcal{C}
- c) Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

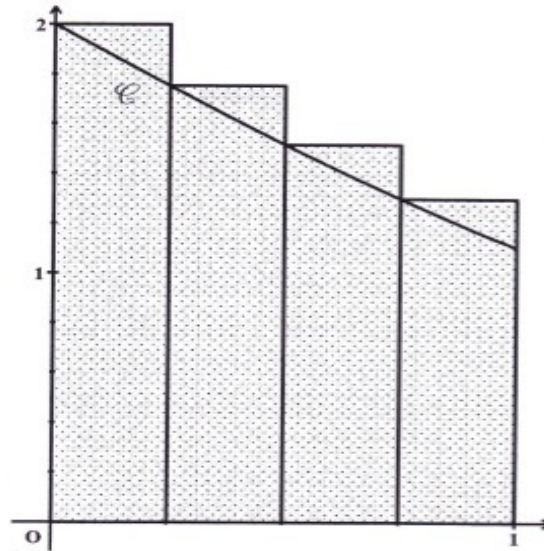
- 2) Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe

On note \mathcal{D} le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine \mathcal{D} en calculant une somme d'aires de rectangles.

- a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en quatre intervalles de même longueur

- Sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine \mathcal{D} en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables : k est un nombre entier
S est un nombre réel

Initialisation : Affecter à S la valeur 0

Traitement : Pour k variant de 0 à 3

$$\text{Affecter à S la valeur } S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$$

Fin du pour

Sortie : Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme

b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1.

On découpe l'intervalle $[0;1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant comme en 2) a)

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3) Calcul de la valeur exacte de l'aire sous la courbe

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$. On admet que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .

a) Calculer l'aire exacte \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unité d'aire.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant \mathcal{A} par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme à la question 2) a) c'est à dire de l'écart entre ces deux valeurs

Exercice 2 : QCM sans justification et sans retrait de point. Une seule bonne réponse par question.

1) Soit $z_1 = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i \frac{z_1}{z_2}$ est :

- a) $\sqrt{3} e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12} e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3} e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) L'équation $-z = \bar{z}$ d'inconnue complexe z , admet :

- a) une solution
 b) deux solutions
 c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite
 d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle

3) Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1,2,3)$, $B(-1,5,4)$ et $C(-1,0,4)$. La droite parallèle à (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$:

- a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$

4) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan \mathcal{P} passant par le point $D(-1,2,3)$ et de

vecteur normal $\vec{n}(3, -5, 1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$

- a) La droite Δ est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
 b) La droite Δ est parallèle au plan \mathcal{P} et n'a pas de point commun avec le plan \mathcal{P} .
 c) La droite Δ et le plan \mathcal{P} sont sécants
 d) La droite Δ est incluse dans le plan \mathcal{P} .

Exercice 3 : Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.

L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété et le reste étant du jazz

Il a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité
- Les $\frac{5}{9}$ de morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considèrera les événements suivants :

C : « le morceau écouté est un morceau de musique classique »

V : « le morceau écouté est un morceau de variété »

J : « le morceau écouté est un morceau de jazz »

H : « le morceau écouté est encodé en haute qualité »

S : « le morceau écouté est encodé en qualité standard »

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ». **On pourra s'aider d'un arbre de probabilité (indispensable à mon avis)**

- 1) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
- 2) On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$
 - a) Les événements C et H sont-ils indépendants ?
 - b) Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$ (lire P de J sachant H)

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique .

- 1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60 .
- 2) Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3, associe sa durée en seconde et on établit que X suit une loi normale d'espérance 200 et d'écart type 20.

On pourra utiliser le tableau ci-dessous

On écoute un morceau musical au hasard .

- 1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leq X \leq 220)$
- 2) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

b	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260
$P(X \leq b)$	0,001	0,006	0,023	0,067	0,159	0,309	0,500	0,691	0,841	0,933	0,977	0,994	0,999

Exercice 4 : Pour les non spécialistes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$

- 1)
 - a) Calculer u_1 et u_2
 - b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
- 2) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante
 - b) Démontrer que la suite (u_n) converge
- 3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3
 - b) Exprimer alors v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 4 : Pour les spécialistes

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n -ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n -ième année après 2013

Ainsi, on a : $a_0 = b_0 = 300$

Des observations faites les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = 0,7 a_n + 0,2 b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1 a_n + 0,6 b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n , on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

1) a) Déterminer U_1

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M \times U_n + P$

2) On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse

c) Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$

3) Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - U$

a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = M \times V_n$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$

4) On admet que, pour tout entier naturel n , $V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n & -\frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n & \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$

a) Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n)

b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme