Corrigé Polynésie 2013

Exercice 1 :

1) a) axe des abscisses : Il faut résoudre l'équation f(x) = 0 c'est à dire $(x+2)e^{-x} = 0$

Comme pour tout réel x, $e^{-x} \neq 0$, l'équation est équivalente à x+2 = 0 c'est à dire x = –2 d'où $(-2;0)$

axe des ordonnées : Il faut calculer f(0) = 2 donc coordonnées (0 ; 2)

b) $\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$ or $\lim_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ donc par composition des limites, on a $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

Comme $\lim_{x\to-\infty} x+2=-\infty$, par produit on a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

f(x) = $\dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc par inverse $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}=0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x}=0$, par somme ,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

D'après la limite en +∞ de la fonction f, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc une asymptote horizontale d'équation y = 0

c) La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-e^{-x}) = (1-x-2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc le signe de f' est celui de $-x-1$ d'où

pour tout x ∈ $]-\infty;-1]$, $f'(x)\geq 0$ donc f est croissante

pour tout x ∈ $[-1;+\infty[$, $f'(x)\leq 0$ donc f est décroissante

2) a) on a f(0) = 2 , $f\left(\dfrac{1}{4}\right) \approx 1{,}75230$, $f\left(\dfrac{2}{4}\right) \approx 1{,}51632$ et $f\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 1{,}29901$

Le calcul de S par cet algorithme est donc : S ≈ $\dfrac{1}{4}\times 2+\dfrac{1}{4}\times 1{,}75230+\dfrac{1}{4}\times 1{,}51632+\dfrac{1}{4}\times 1{,}29901$ ce qui donne à 10^{-3} près S ≈ 1,642

b)

Variables : k,N nombres entiers
S est un nombre réel

Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Lire N

Traitement : Pour k variant de 0 à **N–1**
Affecter à S la valeur S + $\dfrac{1}{\mathbf{N}} f\left(\dfrac{k}{\mathbf{N}}\right)$
Fin du pour

Sortie : Afficher S

3) a) l'aire exacte $\mathscr{A}$ est donnée par : $\int_0^1 f(x)\,dx = [g(x)]_0^1 = g(1)-g(0) = -4e^{-1}+3$

b) $1{,}642-(-4e^{-1}+3) \approx 0{,}114$

<u>Exercice 2 :</u> QCM sans justification et sans retrait de point. Une seule bonne réponse par question.

1) $i\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **réponse C**

2) On utilise la forme algébrique d'un nombre complexe z = a + ib qui donne pour l'équation $-a-ib=a-ib$ c'est à dire $-2a=0$ c'est à dire a = 0 d'où z = ib donc les solutions sont tous les imaginaires purs c'est à dire tous les points de l'axe des ordonnées donc **réponse C**

3) Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1,2,3)$, $B(-1,5,4)$ et $C(-1,0,4)$. La droite parallèles à (AB) passant par le point C a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ $(-2,3,1)$ donc sa représentation paramétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$ est : $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3t \\ z=4+t \end{cases}$ **Réponse A**

4) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1,2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3,-5,1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x=t-7 \\ y=t+3 \\ z=2t+5 \end{cases}$

Un vecteur directeur de Δ est : $\vec{u}(1;1;2)$ On peut alors calculer $\vec{n}\cdot\vec{u} = 3-5+2 = 0$. On a donc Δ parallèle à $\mathscr{P}$.

L'équation du plan est de la forme $3x-5y+z+d=0$. Comme D est dans le plan, on en déduit que d = 10

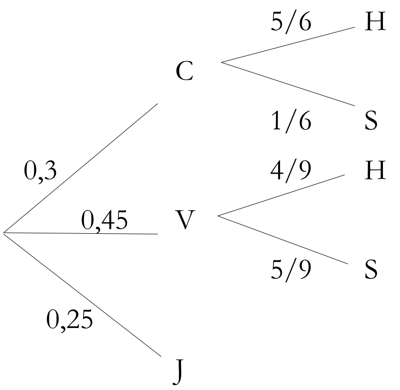
donc équation du plan : $3x-5y+z+10=0$. On peut alors vérifier que le point $(-7,3,5)$ de la droite Δ est

dans $\mathscr{P}$: $-21-15+5+10=-21\neq 0$ donc ce point n'est pas dans le plan . Ils sont donc strictement parallèles

réponse B

Exercice 3 :

Partie 1



1) On cherche P (C∩H) = $0{,}3\times\dfrac{5}{6} = 0{,}25$

2) On sait que P(H) = $\dfrac{13}{20}$

   a) Il faut vérifier que P(C)*P(H)=P(C∩H)

   On a P(C) = 0,3 donc $P(C)\times P(H)=\dfrac{0{,}3\times 13}{20} = \dfrac{3{,}9}{20} = \dfrac{39}{200}$ et P (C∩H) = 0,25 donc résultat différent et événements non indépendants

   b) On a H = (J∩H) ∪ (V∩H) ∪ (C∩H) . Ces trois intersections étant disjointes, on a :

$P(H) = P(J\cap H) + P(V\cap H) + P(C\cap H)$ c'est à dire $P(J\cap H) = P(H) - P(V\cap H) - P(C\cap H)$

soit $P(J \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{0{,}45\times 4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{117-36-45}{180} = \frac{36}{180} = \frac{1}{5}$

On a alors : $P_J(H) = \frac{P(J\cap H)}{P(J)} = \frac{1}{5}\times\frac{4}{1} = \frac{4}{5}$

Partie 2

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est : $\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p représente la probabilité d'écouter un morceau de musique classique (p = 0,3) et n la taille de l'échantillon (n = 60) . On trouve alors : [0,184 ; 0,416]

2) La fréquence de classique écoutée est $\frac{12}{60}=0{,}2$. Comme cette fréquence appartient à l'intervalle précédent , on peut penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse

Partie 3

1) On a : $P(180\leq X\leq 220) = P(X\leq 220)-P(X\leq 180) = 0{,}841-0{,}159 = 0{,}682$
2) On cherche $P(X\geq 4\times 60)=P(X\geq 240) = 1-P(X\leq 240) = 1-0{,}977 = 0{,}023$

<u>Exercice 4 :</u> **Pour les non spécialistes**

1) a) $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{9}{10}$

b) <u>Initialisation :</u> $u_0=\frac{1}{2}>0$ donc relation vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n>0$ et démontrons que $u_{n+1}>0$

Comme $u_n > 0$ alors $3u_n$ et $1+2u_n$ sont > 0 d'où $u_{n+1}>0$

<u>Conclusion :</u> Si la relation est vraie au rang n elle l'est rang n+1 or cette relation est vraie au rang 0 donc par hérédité, pour tout entier naturel n , $u_n>0$

2) On admet que pour tout entier naturel n , $u_n<1$

a) $u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n}-u_n = \frac{3u_n-u_n-2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n-2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$

Comme $u_n>0$, on a $2u_n$ et $1+2u_n$ >0 et comme $u_n < 1$ on a $1-u_n$ >0 d'où $u_{n+1}-u_n > 0$ cad $u_{n+1}>u_n$ et la suite (u_n) est croissante

b) D'après les questions précédentes , la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$

a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1+2u_n}\times\frac{1+2u_n}{1-u_n} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=\frac{u_0}{1-u_0} = 1$

b) On a donc $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$ or on a : $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ donc $(1-u_n)v_n = u_n$ cad $v_n - u_n v_n = u_n$

d'où $u_n + u_n v_n = v_n$ soit $u_n(1+v_n) = v_n$ d'où $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$ et pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$

c) $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1} = \dfrac{3^n}{3^n(1+1/3^n)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car 3>1 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

<u>Exercice 4 :</u> Pour les spécialistes

1) a) $\begin{cases} a_1 = 0{,}7\,a_0 + 0{,}2\,b_0 + 60 = 210 + 60 + 60 = 330 \\ b_1 = 0{,}1\,a_0 + 0{,}6\,b_0 + 70 = 30 + 180 + 70 = 280 \end{cases}$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$ évident

2) On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $I - M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ donc $(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) $I - M$ est donc inversible avec $(I-M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $U = M \times U + P$ donc $U - M \times U = P$ d'où $(I-M)U = P$ cad $U = (I-M)^{-1}P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - U = M \times U_n + P - U$ or $P - U = -M \times U$ d'où $V_{n+1} = M \times U_n - M \times U = M(U_n - U)$

d'où pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$

b) La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison M d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n \times V_0$

4) On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

a) $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n + 60 \\ -\dfrac{50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n + 70 \end{pmatrix}$

$a_n = -\dfrac{100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n + 60$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ pour $-1<q<1$, on en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 60$

b) Le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme peut donc être estimé à 60 milliers