Enoncé **BAC S 2013 LIBAN**

Exercice 1 : QCM de géométrie dans l'espace

Exercice 2 : Probabilité
* Probabilité conditionnelle
* Loi normale

Exercice 3 : Etude de fonction
* fonction exponentielle
* intégrale

Exercice 4 : Non spé Suites numériques
* Algorithmique
* Récurrence
* limite

Exercice 4 : Spécialistes

* algorithmique
* Matrices et Suites

Exercice 1 : QCM sans justification ni retrait de point. Une bonne réponse par question

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

Les points A , B , C et D ont pour coordonnées respectives $A(1,-1,2)$, $B(3,3,8)$, $C(-3,5,4)$ et $D(1,2,3)$

On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=3t+2 \end{cases}$ pour tout réel t

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k+3 \\ z=-k+4 \end{cases}$ pour tout réel k

On note enfin $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$

Question 1 :

A : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles

B : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires

C : Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$

D : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales

Question 2 :

A : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$

B : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$

C : Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.

D : Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

Question 3 :

A : Les points A , D et C sont alignés

B : Le triangle ABC est rectangle en A

C : Le triangle ABC est équilatéral

D : Le point D est le milieu du segment [AB]

Question 4 :

On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

A : $\vec{n}(-1,5,4)$ B : $\vec{n}(3,-1,2)$ C : $\vec{n}(1,2,3)$ D : $\vec{n}(1,1,-1)$

Exercice 2 :

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée »

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18 . On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaines de fabrication F_1 et F_2

Partie A

La chaine de production F_2 semble plus fiable que la chaine de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaine F_1 et 30 % de la chaine F_2 .

La chaine F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaine F_2 en produit 1 % .

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale et on considère les événements suivants :

E : « le petit pot provient de la chaine F_2 »

C : « le petit pot est conforme »

1) Construire une arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2) Calculer la probabilité de l'événement : le petit pot est conforme et provient de la chaine F_1
3) Déterminer la probabilité de l'événement C
4) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé

Partie B

1) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaine F_1 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit une loi normale d'espérance $m_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.

Dans la suite on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$p(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,2	0,0478
0,19	0,21	0,0004

Donner une valeur approchée, à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaine F_1 soit conforme

2) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaine F_2 associe sa teneur en sucre. On suppose que Y suit une loi normale d'espérance $m_2 = 0{,}17$ et d'écart-type σ_2

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaine F_2 soit conforme est égale à 0,99 .

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$

a) Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?

b) Déterminer, en fonction de σ_2 , l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16;0,18]

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2

On pourra utiliser le tableau ci-dessous dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1

β	2,4324	2,4573	2,4838	2,5121	2,5427	2,5758	2,6121	2,6521	2,6968
$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$	0,985	0,986	0,987	0,988	0,989	0,990	0,991	0,992	0,993

<u>Exercice 3 :</u>

Etant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=\dfrac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Partie A

Dans cette partie, on choisit k = 1. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 est donnée en annexe

1) Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter les résultats obtenus
2) Démontrer que pour tout réel x, $f_1(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$
3) On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 . Calculer $f'_1(x)$ et en déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$
4) On définit le nombre I = $\int_0^1 f_1(x)\,dx$. Montrer que I = $\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$ et en donner une interprétation graphique .

Partie B

Dans cette partie, on choisit k = –1 et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant f_{-1} .

Pour tout réel x, on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x.

On note K le milieu de [MP]

1) Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x)+f_{-1}(x)=1$
2) En déduire que le point K appartient à la droite d'équation y = $\dfrac{1}{2}$
3) Tracer la courbe C_{-1} sur l'annexe
4) En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes C_1 , C_{-1} , l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1

Partie C

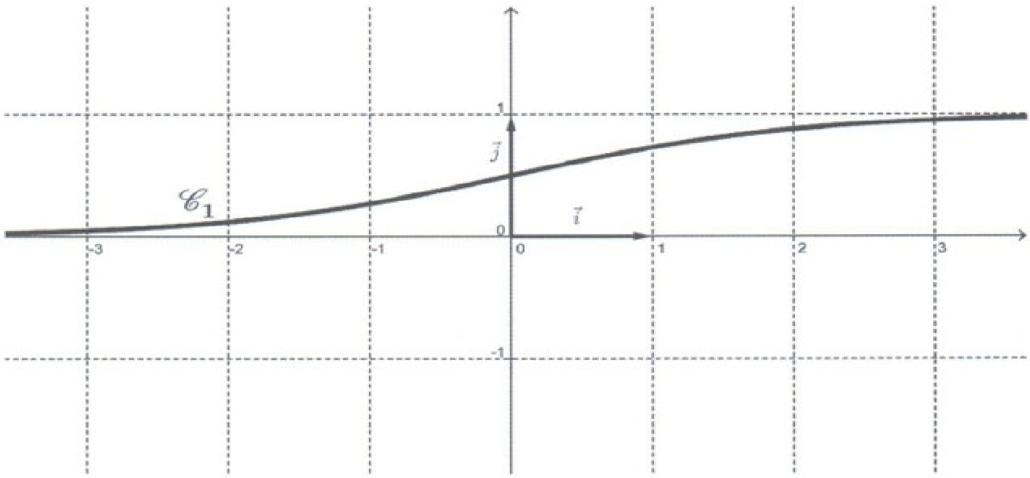
Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse .

1) Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de f_k est strictement comprise entre les droites d'équations y = 0 et y = 1
2) Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante

3) Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1



Exercice 4 : Pour les non spécialistes

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

Partie A

1) On souhaite écrire un algorithme affichant pour tout entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse .

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
Variables v est un réel i et n sont des entiers naturels Traitement Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v	Variables v est un réel i et n sont des entiers naturels Traitement Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour	Variables v est un réel i et n sont des entiers naturels Traitement Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour

2) Pour n = 10, on obtient l'affichage suivant :

1 1,809 2,143 2,333 2,455 2,538 2,600 2,647 2,684 2,714

Pour n = 100, les derniers termes affichées sont :

2,967 2,968 2,968 2,968 2,969 2,969 2,969 2,970 2,970 2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente

Partie B recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
2) En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis de v_n en fonction de n
3) Déterminer la limite de la suite (v_n)

<u>Exercice 4 :</u> Pour les spécialistes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

1) Calculer u_2 et u_3
2) Pour tout entier naturel n ≥ 2, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

<u>Variables :</u> a , b , c sont des nombres réels
i et n sont des entiers naturels ≥ 2

<u>Initialisation :</u> a prend la valeur 3
b prend la valeur 8

<u>Traitement :</u> Saisir n
Pour i variant de 2 à n faire
c prend la valeur a
a prend la valeur b
b prend la valeur …
Fin pour

<u>Sortie :</u> Afficher b

a) Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeur suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4502	13378	39878	119122	356342	1066978	3196838	9582322	28730582

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3) Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = AC_n$

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$

4) Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer QP

On admet que A = PDQ

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nQ$

5) A l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet :

Pour tout entier naturel non nul n , $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$

En déduire une expression de u_n en fonction de n

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?