Exercice 1 :

Question 1 : On peut commencer par chercher un vecteur directeur des droites D et D' :

Pour D : $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3)et pour D' : $\vec{v}$ (1 ; 1 ; –1)

On constate alors que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$ donc les droites sont orthogonales Réponse D

Question 2: On peut commencer ici par vérifier si D et/ou D' est dans le plan P

Pour D :	Pour D' :
$x+y-z+2=0$ $t+1+2t-1-3t-2+2=0$ $0t=0$ Toujours vrai Donc pour tout réel t , le point $(t+1;2t-1;3t+2)$ vérifie l'équation de P donc la droite D est dans P	$x+y-z+2=0$ $k+1+k+3+k-4+2=0$ $3k+2=0$ $k=-\frac{2}{3}$ Comme k est unique, la droite D' coupe le plan P en un point donc D' n'est pas dans P

On peut donc éliminer les propositions b et d

Un vecteur normal de P est $\vec{n}$ (1 ; 1 ; –1) On constate que $\vec{n}=\vec{v}$ ainsi un vecteur normal de P est un vecteur directeur de D' d'où D' orthogonales à P

Réponse C

Question 3 : On peut ici tester les propositions l'une après l'autre

a) $\overrightarrow{AD}(0;3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;6;2)$ Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles donc vecteurs non colinéaires et points non alignés

b) $\overrightarrow{AB}(2;4;6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;6;2)$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = $-8+24+12$ = 28 ≠ 0 donc vecteurs non orthogonales et triangle non rectangle

d) milieu de [AB] ($\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}$) c'est à dire (2 ; 1 ; 5) ne correspond pas aux coordonnées de D

c) On sait alors que la **réponse est C**. On pouvait la vérifier avec la distance entre deux points :

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ = $\sqrt{4+16+36}$ = $\sqrt{56}$

AC = $\sqrt{16+36+4}$ = $\sqrt{56}$ et $\overrightarrow{BC}(-6;2;-4)$ d'où $BC=\sqrt{36+4+16}$ = $\sqrt{56}$

Question D: Un vecteur est normal à un plan ssi il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan

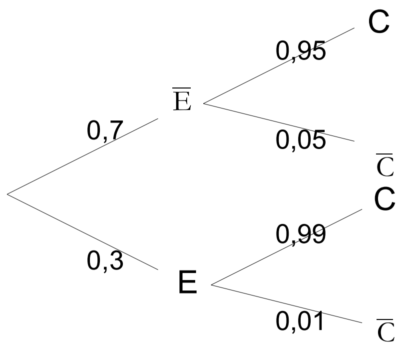
Le vecteur directeur de D' est $\vec{v}$ (1 ; 1 ; –1) . On voit (grâce au produit scalaire) qu'il est orthogonal aux vecteurs des propositions a , b et c

Il nous faut alors un autre vecteur du plan P'. On dispose de $A(1;-1;2)$ et du point donné par l'équation de D' $F(1;3;4)$ d'où le vecteur $\overrightarrow{AF}(0;4;2)$ qui est orthogonal uniquement au vecteur de la **proposition b)**

Exercice 2 :

Partie A

1)



2) On cherche P(C $\cap$ $\overline{E}$) qui vaut d'après l'arbre : $0,7\times0,95 = 0,665$

3) Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc l'événement C est réalisé soit avec E soit avec $\overline{E}$ cad C = (C$\cap$E)$\cup$(C$\cap$ $\overline{E}$) . Comme (C$\cap$E) et (C$\cap$ $\overline{E}$) sont disjoint, on obtient donc :

p(C) = P(C$\cap$E) + P(C$\cap$ $\overline{E}$) = $0,3\times0,99+0,665 = 0,962$

4) On cherche $P_C(E) = \dfrac{P(C\cap E)}{P(C)} = \dfrac{0,665}{0,962} \approx 0,691$

Partie B

1) On cherche P($0,16\leq X\leq0,18$) = 0,9044 d'après le tableau

2) a) Z suit la loi normale centrée réduite

b) Y $\in$ [0,16;0,18] donc Z $\in \left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2};\dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$

c) On cherche σ_2 tel que P(Y $\in$ [0,16;0,18]) = 0,99 donc tel que P(Z $\in \left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2};\dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$) = 0,99. Le tableau

nous donne β = 2,5758 d'où $\dfrac{0,01}{\sigma_2}=2,5758$ ce qui donne $\sigma_2=\dfrac{0,01}{2,5758} \approx 0,004$

Exercice 3 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ donc comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. C_1 admet donc en $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation y = 1

De même, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x} = +\infty$ et par inverse $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

C_1 admet donc en $-\infty$, une asymptote horizontale d'équation y = 0 (axe des abscisses)

2) $f_1(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

3) 1 + e^{-x} =0 $\Leftrightarrow$ $e^{-x}=-1$ ce qui est impossible car $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction f_1 est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_1'(x) = -\dfrac{-e^x}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Comme un carré est un nombre positif et que $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $f_1'(x) > 0$ d'où f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) I = $\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$ forme $\dfrac{u'}{u}$ avec u > 0 sur [0;1] d'où I = $[\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2)$ $= \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

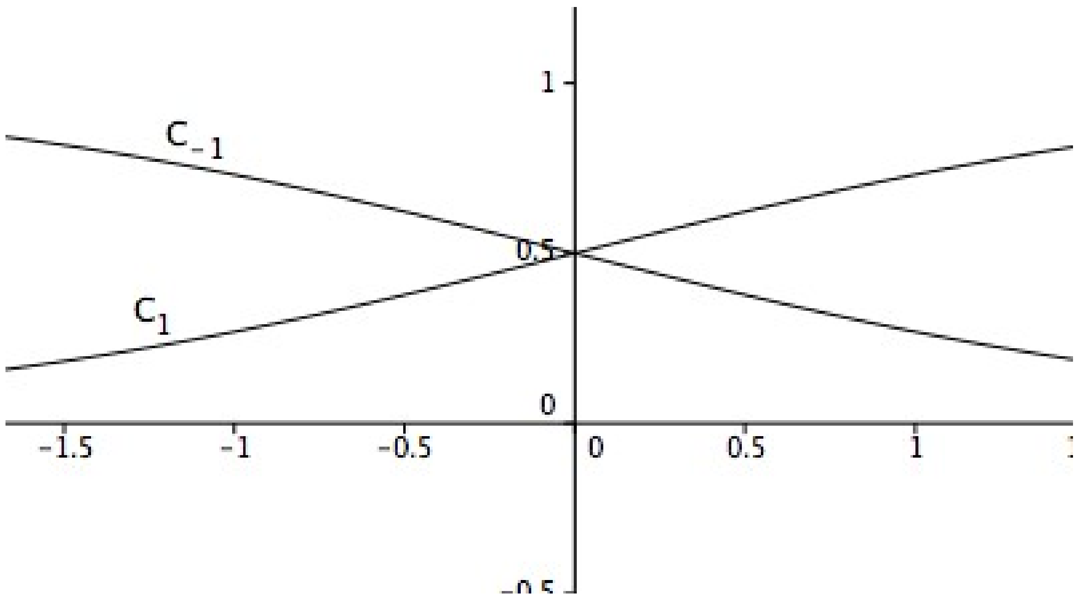
I correspond à l'aire du domaine délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_1 et les droites d'équation x = 0 et x = 1

Partie B

1) $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{1}{1+e^x} = 1$

2) K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_M + x_P}{2}; \dfrac{y_M + y_P}{2}\right)$ cad $\left(\dfrac{x+x}{2}; \dfrac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2}\right)$ = (x ; $\dfrac{1}{2}$) Ainsi l'ordonnée de K est fixe donc il est sur la droite d'équation y = $\dfrac{1}{2}$

3)



4) $f_1(x) - f_{-1}(x) = f_1(x) - (1 - f_1(x)) = 2f_1(x) - 1$

On cherche J = $\int_0^1 f_1(x) - f_{-1}(x)\,dx = \int_0^1 2f_1(x) - 1\,dx$ d'où

par propriété de linéarité de l'intégrale, J = $2I - 1 = 2\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) - 1$ unités d'aire

Partie C

1) VRAI

Pour tout k, $1 + e^{-kx} > 0$ donc $f_k(x) > 0$ et C_k est donc au dessus de y = 0

Pour tout k, $e^{-kx} > 0$ donc $1 + e^{-kx} > 1$ donc la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$ $\dfrac{1}{1+e^{-kx}} < 1$ cad C_k en dessous de y = 1

2) FAUX

f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f_k'(x) = -\dfrac{-ke^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2} = \dfrac{ke^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$. On voit donc que pour k négatif, $f_k'(x)$ est négatif donc f décroissante

3) VRAI

$f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-k/2}} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1+e^{-k/2} \leq \frac{1}{0{,}99}$ (on change l'ordre car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ $\Leftrightarrow e^{-k/2} \leq \frac{1}{0{,}99}-1 \Leftrightarrow -\frac{k}{2} \leq \ln\left(\frac{0{,}01}{0{,}99}\right) \Leftrightarrow k \geq -2\ln\left(\frac{0{,}01}{0{,}99}\right) \approx 9{,}19$

<u>Exercice 4 :</u> Pour les non spécialistes

<u>Partie A</u>

1) L'algorithme 1 ne convient pas car la ligne *afficher v* n'est pas dans la boucle Pour donc on affiche ici le nième terme

L'algorithme 2 ne convient pas car la ligne *v prend la valeur 1* est présente dans la boucle donc cet algorithme calcule n fois v_1

L'algorithme 3 est correct

2) On peut conjecturer que la suite semble croissante et de limite 2,970

3) a) **<u>Initialisation :</u>** $v_0 = 1 \in]0;3[$ donc relation vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $0 < v_n < 3$ et démontrons que $0 < v_{n+1} < 3$

$0 < v_n < 3$ donc $-3 < -v_n < 0 \Leftrightarrow 3 < 6-v_n < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3}$ on change l'ordre car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ $\Leftrightarrow \frac{9}{6} < v_{n+1} < 3$ donc $0 < v_{n+1} < 3$

Conclusion : si la relation est vraie au rang n alors elle l'est au rang n+1 or cette relation est vraie au rang 0 donc par hérédité, elle l'est pour tout n

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9-6v_n+v_n^{\,2}}{6-v_n} = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$

Un carré étant un nombre positif, le signe de $v_{n+1}-v_n$ est celui de $6-v_n$ or $v_n \in]0;3[$ donc $6-v_n \in]3;6[$ donc $6-v_n > 0$ et $v_{n+1}-v_n > 0$ cad $v_{n+1} > v_n$ cad à dire (v_n) croissante donc monotone

c) (v_n) est une suite croissante majorée par 3 donc elle converge

<u>Partie C</u>

1) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n}{3v_n-9} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)} - \frac{1}{v_n-3} =$
$\frac{6-v_n-3}{3(v_n-3)} = \frac{3-v_n}{3(v_n-3)} = -\frac{1}{3}$ d'où (w_n) arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ de premier terme $w_0 = \frac{1}{v_0-3} = -\frac{1}{2}$

2) On a donc $w_n = w_0 + nr = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n = \frac{-3-2n}{6}$

$w_n = \frac{1}{v_n-3} \Leftrightarrow v_n - 3 = \frac{1}{w_n} \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{w_n} + 3 \Leftrightarrow v_n = \frac{6}{-3-2n} + 3 = \frac{6-9-6n}{-3-2n} = \frac{-3-6n}{-3-2n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3-6n}{-3-2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-6n}{-2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$

<u>Exercice 4 :</u> Pour les spécialistes

1) $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$ et $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2) a) b prend la valeur $5a - 6c$

b) la suite (u_n) semble croissante

3) $\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} = u_{n+1} + 0u_n \end{cases}$ donc $C_{n+1} = AC_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La suite de matrice (C_n) est donc géométrique de raison A d'où $C_n = A^n C_0$ avec $C_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

<u>Initialisation :</u> A = PDQ donc relation vraie au rang 1

Supposons qu'il existe un entier n non nul tel que $A^n = PD^nQ$ et démontrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$

$A^{n+1} = A^n A = PD^nQ\,PDQ$ Or $QP = I_2$ donc $A^{n+1} = PD^n DQ$ cad $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$

<u>Conclusion :</u> Si la relation est vraie au rang n alors elle l'est au rang n+1 or cette relation est vraie au rang 1 donc par hérédité, elle l'est pour tout $n \neq 0$

5) $C_n = A^n C_0 = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $u_n = -8 \times 2^n + 8 \times 3^n + 9 \times 2^n - 6 \times 3^n =$

$2^n + 2 \times 3^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour q > 1 donc la suite diverge