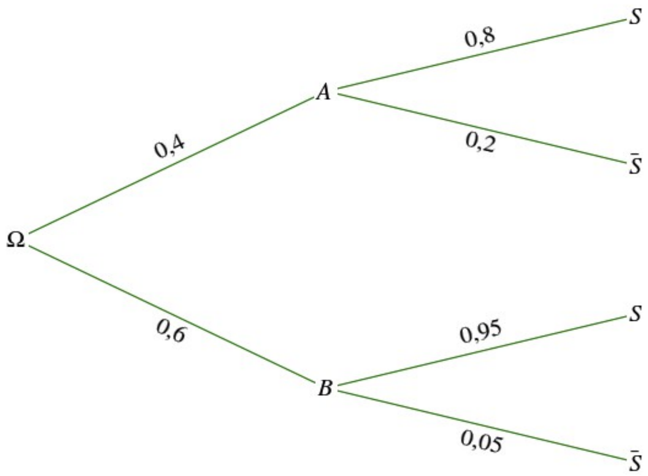
Bac Métropole Juin 2016

Exercice 1 :

Partie A

1)



On applique la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(S\cap A) + P(S\cap B)$

$= 0{,}4\times 0{,}8+0{,}6\times 0{,}95$

$= 0{,}32+0{,}57$

$= 0{,}89$

2) On cherche $P_S(A) = \dfrac{P(S\cap A)}{P(S)} = \dfrac{0{,}4\times 0{,}8}{0{,}89} \approx 0{,}36$

Partie B

1) Les conditons d'approximations sont réunies : $n=400>30$, $nf=400\times 0{,}92=366>5$ et

$n(1-f)=400\times 0{,}08=32>5$ donc on peut ércire l'intervalle de confiance : $I = \left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ = [0,87;0,97]

2) L 'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et on veut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leq 0{,}02$ ce qui donne $\sqrt{n}\geq\dfrac{0{,}02}{2}$

c'est à dire $n\geq 10\,000$ donc échantillon de taille 10 000 nécessaire

Partie C

1) a) $P(T\leq a)$ correspond à l'aire du domaine délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = a

b) $P(T\leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t}+1$

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty$ car $\lambda>0$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$

d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} P(T\leq t) = 1$

2) On a $1-e^{-\lambda 7}=0{,}5$ donc $e^{-7\lambda}=0{,}5$ et $\lambda=\dfrac{\ln 0{,}5}{-7} \approx 0{,}099$

3) a) On veut $P(T\geq 5) = 1-P(T<5) = e^{-5\lambda} \approx 0{,}61$

b) On applique le principe de loi à durée de vie sans vieillissement et on sait que la probabilité recherchée est celle de la question précédente

c) $E(T)=\dfrac{1}{\lambda} \approx 10$

Exercice 2 :

Affirmation 1

$\overrightarrow{AB}$ (2 ; -2 ; -2) et $\overrightarrow{AC}$ (-2 ; -2 ; -2)

$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ = -1 et $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ = 1 comme ces deux quotients ne sont pas égaux, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés

Affirmation 2

Les points A , B et C ne sont pas alignés donc ils forment un plan. Démontrer alors que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -2+2=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -2+2=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à (ABC)

Affirmation 3

Equation de (ABC) : $y-z+d=0$ et comme A est dans ce plan, on trouve d = 1 donc (ABC) : $y-z+1=0$

Equation paramétrique de (EF) :

$\overrightarrow{EF}$ ($-1;-1;1$) donc $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-2-t \\ z=3+t \end{cases}$

Intersection : Existe-t-il un unique t tel que $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-2-t \\ z=3+t \\ y-z+1=0 \end{cases}$?

L_4 devient : $-2-t-3-t+1=0$ donc t = -2 comme t est unique, la droite (EF) coupe le plan (ABC) en le point M de coordonnées $(-1-(-2);-2+2;3-2)$ = $(1;0;1)$

Le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3-1}{2};\frac{0+0}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ = $(1;0;1)$ donc (EF) coupe (ABC) au milieu de [BC]

Affirmation 4

Equation de (AB) $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2t \\ z=1-2t \end{cases}$ $\overrightarrow{CD}(3;1;-2)$ donc équation de (CD) $\begin{cases} x=-1+3t' \\ y=t' \\ z=1-2t' \end{cases}$

En cas de point d'intersection , on doit donc avoir $1-2t=1-2t'$ c'est à dire t = t' d'où en utilisant les ordonnées $-2t=t$ donne t = 0 mais les abscisses donnent alors x = 3 ou –1 ce qui n'est pas possible il n'existe donc pas de couple (t;t') donc pas d'intersection

Exercice 3 : non spécialiste

1) f(x) = x

   $-\ln(x^2+1)=0$

   $x^2+1=e^0$ ^

   $x^2=0$

   $x=0$

2)

- la fonction $x \to x^2+1$ est un polynôme strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc $\ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=1-\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f'(1)=0$
- $\lim_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ or $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc par compo des limites, $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ et on truve alors facilement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3) f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve l'ordre : $0\leq x\leq 1$ donc $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$ cad

   $0\leq f(x)\leq 1-\ln 2$ et comme $1-\ln 2\leq 1$ on a $0\leq f(x)\leq 1$

4) a) L'algorithme détermine le plus petit entier naturel n pour lequel on a pour tout x ≥ N, f(x) ≥ A pour une valeur de A fixée par l'utilisateur. Cette valeur de N existe car la limite de f en +∞ est +∞ ce qui signifie que l'on peut rendre f aussi grand que l'on pour x suffisamment grand

   b) En programmant la calculatrice, on trouve f(110) ≈ 100,59 et f(109) ≈ 99,6 donc l'algorithme va afficher N = 110

Partie B

1) Initialisation: $u_0=1\in[0;1]$

   Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n\in[0;1]$ et Démontrons alors que $u_{n+1}\in[0;1]$

   On sait d'après la question A3 que pour x ∈ [0;1] alors f(x) ∈ [0;1]

   d'où comme on suppose $u_n\in[0;1]$ on a $f(u_n)$ ∈ [0;1] c'est à dire u_{n+1} ∈ [0;1]

   On termine la récurrence

2) $u_{n+1}-u_n = -\ln(u_n^2+1)$ or $u_n^2+1\geq 1$ donc $\ln(u_n^2+1)\geq 0$ d'où $u_{n+1}-u_n\leq 0$ cad $u_{n+1}\leq u_n$ donc suite décroissante

3) suite décroissante et minorée par 0 donc convergente

4) la limite vaut 0 d'après A1

Exercice 4 :

1) $\tan(\alpha)=\frac{AE}{ET} = \frac{25}{x}$ et $\tan(\beta)=\frac{BE}{ET} = \frac{30{,}6}{x}$

2) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ donc fonction croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

3) $\tan(\gamma) = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{30{,}6}{x}-\frac{25}{x}}{1+\frac{25}{x}\times\frac{30{,}6}{x}} = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{1-\frac{756}{x^2}} = \frac{5{,}6}{x}\times\frac{x^2}{x^2+756} = \frac{5{,}6\,x}{x^2+765}$

4) $\frac{1}{\tan(\gamma)} = \frac{x^2+765}{5{,}6\,x} = \frac{x}{5{,}6}+\frac{765}{5{,}6\,x} = \frac{f(x)}{5{,}6}$

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle inverse l'ordre ainsi les variations de f sont contraires de celle de $\tan(\gamma)$ et donc si f admet un minimum, $\tan(\gamma)$ est maximum.

Etudions donc la fonction rationnelle f dérivable sur son domaine de définiton]0;50]

$f'(x)=1-\frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2}$

Le signe est celui de x^2-765 polynôme du second degré de racines $\pm\sqrt{765}$ Ce polynôme est donc du signe de a sauf entre ses racines c'est à dire négatif sur $]0;\sqrt{765}]$ et positif sur $[\sqrt{765};+\infty[$ donc f admet un minimum en $\sqrt{765} \approx 28$ m

on a alors $\tan(\gamma) = \frac{5{,}6}{f(\sqrt{765})} \approx 0{,}018$ ce qui donne $\gamma \approx 0{,}02$ rad

Exercice 3 : Spécialiste

1) a) $15x-12y=3(5x-4y)$ donc multiple de 3

b) Supposons qu'il existe un couple d'entiers respectant $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$ on a alors $12y-15x=-8$ c'est à dire $15x-12y=8$ or on vient de voir que 15x-12y est multiple de trois et donc ne peut pas être égal à 8 donc aucun point de Δ n'est à coordonnées entières

2) a) ny_0-mx_0 est un produit et une somme d'entiers donc est entier

On a $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$ donc $ny_0-mx_0=\frac{-np}{q}$ d'où comme ny_0-mx_0 est entiers, $\frac{np}{q}$ aussi d'où q divise np

b) q divise np avec p et q sont premiers entre eux , d'après le th de Gauss q divise n

3) a) n = qr or n et m sont premiers entre eux donc d'après le th de Bezout, il existe deux entiers u et v tel que $nu-mv=1$ cad $qru-mv=1$

b) $qru-mv=1$ donc en multipliant par -pr, $-prqru+prmv=-pr$. On pose $x_0=-prv$ et

$y_0=-pru$ on obtient donc $qry_0-mx_0=-pr$ qui peut s'écrire $y_0=\frac{mx_0-pr}{qr}$ = $\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$

on a donc trouvé un couple $(x_0;y_0)$ d'entiers solution

4) 4 divise 8 donc oui il existe un tel couple

5) a) on vient de voir que si q divise n, il y a une solution entière et que sinon il n'y en a pas donc cet algorithme se termine toujours

b) on trouve un couple d'entier appartenant à la droite Δ s'il existe