DS première C

SANS CALCULATRICE

Dans tous le devoir, C désigne le cercle trigonométrique. On prendra soin de justifier toutes les réponses données sauf indication contraire de l'énoncé

1) Déterminer la mesure principale des angles suivants dont les mesures en radians sont :

$$-\frac{7\pi}{3}\ ,\ \frac{47\pi}{12}\ ,\ \frac{17\pi}{6}\ ,\ -\frac{239\pi}{4}$$

$-\frac{7\pi}{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ (mesure principale)

$\frac{47\pi}{12} - 2\times 2\pi = -\frac{\pi}{12}$ (mesure principale)

$\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6}$ (mesure principale)

$-\frac{239\pi}{4} + 30\times 2\pi = \frac{\pi}{4}$ (mesure principale)

2) Dire si les inégalités suivantes sont vraies ou fausses :

a) $\cos(0{,}99\pi) < 0$ b) $\sin(0{,}51\pi) < 0$

a) $0{,}99\pi \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ donc $\cos(0{,}99\pi) < 0$ VRAIE

b) $0{,}51\pi \in \left[\frac{+\pi}{2};\pi\right]$ donc $\sin(0{,}51\pi) > 0$ FAUX

3) Déterminer le signe des nombres suivants : $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

$\frac{13\pi}{12} \in \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0$

4) Dans chaque cas, placer le point M image du réel x sur le cercle C puis donner la valeur exacte de $\cos x$ et $\sin x$

a) $x = \frac{5\pi}{4}$ b) $x = \frac{7\pi}{6}$

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$

5) On donne $\sin x = -\frac{1}{5}$ avec $x \in [0;\pi]$

Déterminer les valeurs de $\sin(\pi - x)$, $\cos(x)$, $\cos(\pi - x)$ et $\tan(\pi - x)$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{1}{5}$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ donc on en déduit $\sin^2(x) = \frac{24}{25}$ donc $\sin x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$ et comme $x \in [0;\pi]$

  le sinus est positif d'où $\sin x = \frac{\sqrt{24}}{5}$

- $\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{\sqrt{24}}{5}$ et $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \sqrt{24}$

6) Soit x_1 , x_2 et x_3 trois mesures principales telles que :

$$\begin{cases} \cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \cos x_3 = 0 \\ \sin x_3 < 0 \end{cases}$$

Donner les valeurs de x_1 , x_2 et x_3

$x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{\pi}{2}$

7) Résoudre dans $]-\pi ; +\pi]$ l'équation $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ donc S = { $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ }

8) Soit l'équation (E) : $2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$. On pose X = $\cos x$

a) A quel intervalle appartient X ?

X ∈ [-1;1]

b) Résoudre l'équation $2X^2 + 9X + 4 = 0$

$\Delta = 81 - 4 \times 2 \times 4 = 49$ > 0 donc deux solutions $X_1 = -4$ ou $X_2 = -\frac{1}{2}$

c) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

On doit donc avoir cos x= -4 ou $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = -4$ est impossible car -4 ∉ [-1;1]

d'où $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ et x = $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$