DS 1 C **Vendredi 17 Janvier 2020**

2 heures Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Calcul de dérivée (7 points)

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes en ayant précisé auparavant l'ensemble sur lequel f est dérivable . On réduira la dérivée au même dénominateur si nécessaire .

1) $f(x)=\frac{4}{3}x^8-5x^3+4x^2+2x+4$

f polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{32}{3}x^7-15x^2+8x+2$

2) $f(x)=\frac{-2}{x^5}$ = $-2\times\frac{1}{x^5}$

f est de la forme $\frac{k}{u}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 0 donc f est dérivable sur $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$

$f'(x)=-2\times-\frac{5x^4}{(x^5)^2}$ = $\frac{10}{x^6}$

3) $f(x)=(2-3x)\sqrt{x}$

produit de fonctions dérivables sur $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$ forme $u\times v$ avec

$u(x)=2-3x$ et $v(x)=\sqrt{x}$

$u'(x)=-3$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=-3\sqrt{x}+(2-3x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=\frac{-6x+2-3x}{2\sqrt{x}}$ = $\frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x)=\frac{4x+3}{1-4x}$

f fonction homographique donc dérivable sur $D_f = \mathbb{R} / \{1/4\}$

forme $\frac{u}{v}$ avec u(x) = 4x+3 et $v(x)=1-4x$

$u'(x)=4$ et $v'(x)=-4$

$f'(x)=\frac{4(1-4x)-(4x+3)\times(-4)}{(1-4x)^2}$

$f'(x)=\frac{16}{(1-4x)^2}$

5) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2-7}$

f fonction rationnelle dérivable sur D_f

$D_f = \mathbb{R} / \{ \pm\sqrt{7} \}$

forme u/v avec $u(x)=2x+3$ et $v(x)=x^2-7$

$u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$

$f'(x)=\frac{2\times(x^2-7)-2x(2x+3)}{(x^2-7)^2}$

$f'(x)=\frac{-2x^2-14-6x}{(x^2-7)^2}$

6) $f(x)=(2x^2-3x+1)^2$

$f(x)=4x^4+9x^2+1-12x^3+4x^2-6x$

$f(x)=4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynôme

$f'(x)=16x^3-36x^2+26x-6$

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=3x^2-4x+1$.

1) En utilisant la définition du nombre dérivé , calculer, s'il existe, le nombre dérivé de f en 1

$$T(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3(1+h)^2-4(1+h)+1-0}{h} = \frac{3h^2+2h}{h} = 3h+2$$

$\lim_{h\to 0} T(h)$ = 2 donc f dérivable en 2 et $f'(1)=2$

2) Déterminer la dérivée $f'(x)$ = $f'(x)=6x-4$

3) Déterminer l'équation de la tangente en a = 2 à la courbe représentative de f

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=8(x-2)+5$

$y=8x-11$

4) a) Démontrer que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y=(6a-4)x-3a^2+1$ Facile

b) Pour quelle valeur de a la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y=-2x+5$

il faut résoudre $f'(a)=-2$ (même coef directeur)

$6a-4=-2$

$a=\frac{1}{3}$

c) Pour quelle valeur de a la tangente passe-t-elle par le point $P(1;-12)$

On veut $y_P=(6a-4)x_P-3a^2+1$

$-12=6a-4-3a^2+1$

$3a^2-6a-9=0$ Δ = 144 > 0 donc deux racines $a_1=-1$ ou $a_2=3$

Exercice 3 : (2 points)

A l'aide de la représentation graphique de la fonction f suivante, recopier et compléter le tableau ci-contre :

x	– 6	– 3	– 1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-1}{2}$

Exercice 4 : (5 points)

Partie A

1) Définir la suite (u_n) dont l'algorithme ci-dessous calcule le terme u_n ?

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{3}{u_n}\right) \end{cases}$$

2) a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 $u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{3}{u_0}\right)$ = 2 $u_2=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{3}{u_1}\right)$ = $\frac{7}{4}$ $u_3=\frac{1}{2}\left(u_2+\frac{3}{u_2}\right)$ = $\frac{97}{56}$ $\approx$ 1,73214 b) Utiliser votre calculatrice pour donner la valeur de u_{10} u_{10} $\approx$ 1,732050808	u ← 1 Pour i allant de 1 à N faire u ← $\frac{1}{2}\left(u+\frac{3}{u}\right)$ Fin pour Afficher u

Partie B

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=2u_n+3 \end{cases}$

Répondre aux questions suivantes en justifiant la réponse dans chaque cas

a) Calculer le terme de rang 3

$u_1=2u_0+3=-1$ $u_2=2u_1+3$ = 1 et $u_3=2u_2+3$ = 5

b) On donne le terme 8 189. Calculer le terme suivant

On a $u_n=8189$ et on veut le suivant cad $u_{n+1}=2u_n+3$ = $2\times8189+3=16381$

c) Calculer le $6^{ème}$ terme

On cherche u_5 $u_4=2u_3+3$ =13 et $u_5=2u_4+3=29$

d) On donne le terme 1021. Calculer le précédent

On donne $u_{n+1}=1021$ donc $2u_n+3=1021$ ce qui donne $u_n=509$

e) On donne $u_n=61$. Calculer u_{n+2}

$u_{n+2}=2u_{n+1}+3=2(2u_n+3)+3$ = 253

f) Exprimer u_{n+3} en fonction de u_n

$u_{n+3}=2(2\times(2u_n+3)+3)+3$ = $8u_n+21$