DS 1 B **Jeudi 9 janvier 2020**

2 heures

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Calcul de dérivée (9 points)

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes en ayant précisé auparavant l'ensemble sur lequel f est dérivable . On réduira la dérivée au même dénominateur si nécessaire .

1) $f(x)=5x^3-4x^2-2x+1$

f est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=15x^2-8x-2$

5) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x-1}$

f est une fonction homographique dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{1}{3} \}$

$u(x)=2x+5 \qquad v(x)=3x-1$

$u'(x)=2 \qquad v'(x)=3$

$$f'(x)=\frac{2(3x-1)-3(2x+5)}{(3x-1)^2} = \frac{-17}{(3x-1)^2}$$

2) $f(x)=\dfrac{3}{x^4} = 3\times\dfrac{1}{x^4}$

$\dfrac{1}{x^4}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec

$u(x)=x^4$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x)=3\times\left(\frac{-u'}{u^2}\right) = 3\times\left(\frac{-4x^3}{(x^4)^2}\right)$$

$$= \frac{-12x^3}{x^8} = \frac{-12}{x^5}$$

6) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2+5}$

f est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$. (ici x^2+5 ne peut pas être égal à 0 donc pas de valeur interdite

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+5)-(x-4)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2+8x+5}{(x^2+5)^2}$$

3) $f(x)=(1-2x)\sqrt{x}$

produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

donc f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

$u(x)=1-2x$ et $v(x)=\sqrt{x}$

$u'(x)=-2 \qquad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=-2\sqrt{x}+(1-2x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=-2\sqrt{x}+\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}$$

7) $f(x)=(3x^2-5x+2)^2$

f est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x)=9x^4+25x^2+4-30x^3+12x^2-20x$

$f(x)=9x^4-30x^3+37x^2-20x+4$

$f'(x)=36x^3-90x^2+74x-20$

$$f'(x)=\frac{-4x+1-2x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-6x+1}{2\sqrt{x}}$$

4) $f(x)=\frac{2}{3x-4}$ fonction homographique dérivable sur Df = IR / {4/3}

$f(x)=2\times\frac{1}{u}$ donc $f'(x)=2\times\frac{-u'}{u^2}$ = $2\times\frac{-3}{(3x-4)^2}$ = $\frac{-6}{(3x-4)^2}$

<u>Exercice 2 :</u> (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=3x^2-4x+1$.

1) En utilisant la définition du nombre dérivé , calculer, s'il existe, le nombre dérivé de f en 1

   $\mathrm{T}(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ = $\frac{3(1+h)^2-4(1+h)+1-0}{h}$ = $\frac{3h^2+2h}{h}$ = $3h+2$

   $\lim\limits_{h\to 0}\mathrm{T}(h)$ = 2 donc f dérivable en 2 et $f'(1)=2$

2) Déterminer la dérivée $f'(x)$

   $f'(x)=6x-4$

3) Déterminer l'équation de la tangente en a = 2 à la courbe représentative de f

   $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

   $y=8(x-2)+5$

   $y=8x-11$

4) a) Démontrer que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y=(6a-4)x-3a^2+1$ Facile

   b) Pour quelle valeur de a la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y=-2x+5$

   il faut résoudre $f'(a)=-2$ (même coef directeur)

   $6a-4=-2$

   $a=\frac{1}{3}$

   c) Pour quelle valeur de a la tangente passe-t-elle par le point $\mathrm{P}(1;-12)$

On veut $y_{\mathrm{P}}=(6a-4)x_{\mathrm{P}}-3a^2+1$

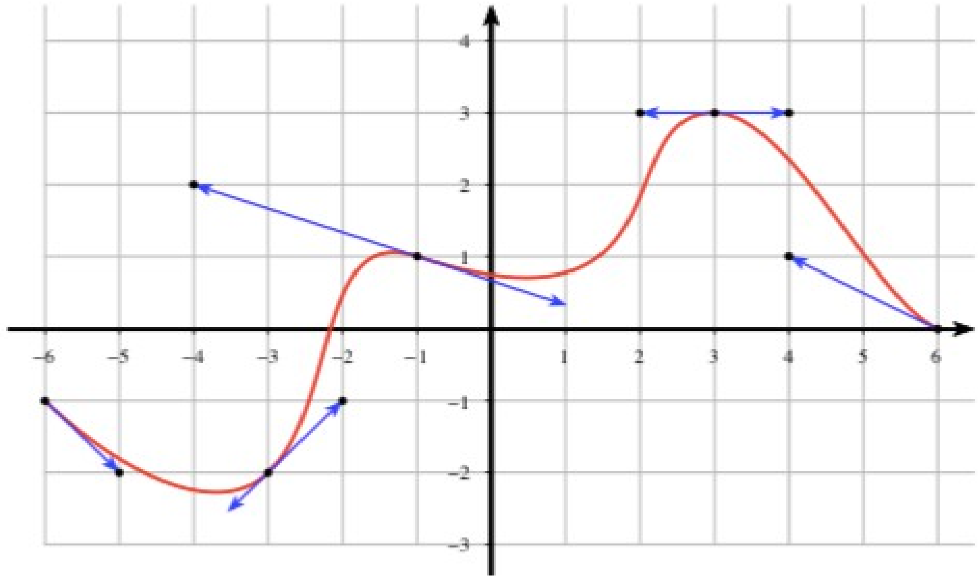
$-12=6a-4-3a^2+1$

$3a^2-6a-9=0$ Δ = 144 > 0 donc deux racines $a_1=-1$ ou $a_2=3$

Exercice 3 : (2 points)

A l'aide de la représentation graphique de la fonction f suivante, recopier et compléter le tableau ci-contre :

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-1}{2}$



Exercice 4 : (3,5 points)

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+25$.

Soit a un réel.

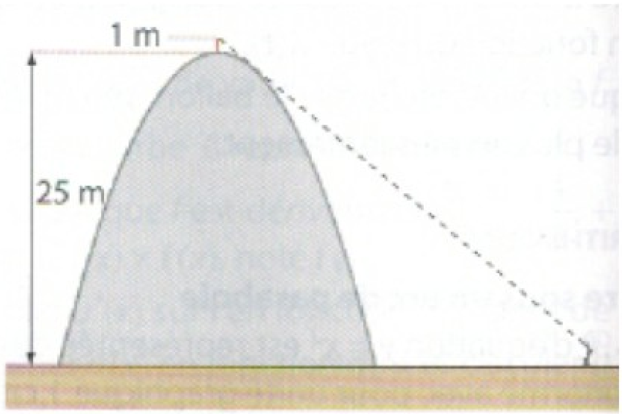
En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer par le calcul que $f'(a)=-2a$

Facile

2) *Dans cette question, toute trace de recherche sera valorisée*

Au sommet d'un terril de 25 m de haut, on a planté un bâton de 1 m de haut . On modélise en coupe ce terril par un morceau de la parabole d'équation $y=-x^2+25$

Si Alexis, même du haut de ses 1 m 80 , se place trop prés du pied du terril, il ne voit plus le bâton.



Votre objectif est de déterminer à quelle distance minimale il doit se placer s'il veut apercevoir le haut du bâton

Indication : on prendra comme axe des abscisses le sol et comme axe des ordonnées l'axe de symétrie de la parabole

S'il veut apercevoir le haut du bâton, la « droite » de vision doit être tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)=-x^2+25$.

La tangente à la courbe en a a pour équation : $y=-2a(x-a)+f(a)$

$$y=-2a(x-a)-a^2+25$$

$$y=-2ax+a^2+25$$

La tangente passe par le sommet du bâton point de coordonnées $(0;26)$ donc

$26=a^2+25$ cad $a^2=1$ d'où a = ± 1 et comme on est du côté positif a = 1

L'équation de la tangente est donc $y=-2x+26$. on cherche donc l'abscisse du point de cette tangente correspondant à Alexis de coordonnées $(x;1{,}80)$ ce qui donne $1{,}8=-2x+26$ d'où $x=12{,}1$ d'où Alexis est à 12,1 m de l'origine du repère et comme le pied de la parabole est à 5 m de l'origine , Alexis doit se placer à 7,1 m du pied du terril