



C'est l'anniversaire de Max . Il a reçu un aquarium sphérique suspendu qui selon la notice rempli au-delà des deux tiers de son volume total.

Max cherche la hauteur maximale que peut contenir l'aquarium.

**Mise en équation du problème**

- 1) On modélise l'aquarium par une boule de rayon  $r = 6$  cm . Déterminer son volume  $V$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$$

- 2) On remplit l'aquarium d'eau jusqu'à une hauteur  $h$ .

a) Dans quel intervalle peut varier  $h$  ?

$h$  varie entre 0 et 12

b) En recherchant la formule donnant le volume d'une calotte sphérique, exprimer le volume d'eau en fonction de la hauteur  $h$

Le volume est donné par  $V = \pi h^2(3R - h) \div 3$ .

$$V = \frac{\pi h^2(3 \times 6 - h)}{3} = \frac{\pi \times h^2(18 - h)}{3} = 6\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

- c) Justifier alors que la résolution du problème revient à celle de l'équation :  $18h^2 - h^3 - 576 = 0$

La hauteur maximale d'eau est donc la solution de l'équation

$$6\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3} = \frac{2}{3} \times 288\pi \Leftrightarrow 18\pi h^2 - \pi h^3 = 576\pi \Leftrightarrow 18h^2 - h^3 = 576$$

**Algorithme de dichotomie**

Nous allons utiliser pour résoudre ce problème une méthode algorithmique dite de dichotomie

- 1) Un premier encadrement

A l'aide du menu graph de votre calculatrice, afficher la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 18x^2 - x^3 - 576$  sur l'intervalle  $[0;12]$  et donner un encadrement par deux entiers de la hauteur  $h_0$  recherchée

On trouve  $h_0$  compris entre 7 et 8

- 2) Principe de la méthode de dichotomie

a) Quel est le signe de  $f(7,5)$  ?  $f(7,5) = 14,625 > 0$

b) Proposer alors un nouvel intervalle auquel doit appartenir  $h_0$  ?

on a  $f(7)$  négatif et  $f(8)$  positif donc comme  $f(7,5)$  est positif, on doit avoir  $h_0$  entre 7 et 7,5

c) On donne l'algorithme suivant et son code en python

Cet algorithme itère le procédé décrit dans la question précédente afin d'obtenir un encadrement de  $h_0$  d'amplitude inférieure à 0,1

Appliquer cet algorithme en complétant ce tableau d'état des variables

Etapes	Milieu m	f(m)	Intervalle [a;b] contenant $h_0$	
			a	b
0			7	8
1	7,5	14,63	7	7,5
2	7,25	-10,9	7,25	7,5
3	7,375	1,900	7,250	7,375
4	7,3125	-4,5000	7,3125	7,3750

Quel couple cet algorithme affichera-t-il ?

Il affichera  $a = 7,3125$  et  $b = 7,375$  l'algorithme s'arrête car  $b - a = 0,0626 < 0,1$

d) A titre d'entraînement , programmer cet algorithme sous mu-editor et vérifier les résultats de la question précédente

e) Quelle ligne de l'algorithme en python faut-il modifier pour obtenir un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  ?

il faut modifier la ligne 7 : **Tant que  $b-a > 0,01$  faire**

Plus généralement, créer une fonction en python appelée dichotomie qui prend en argument l'amplitude souhaitée et retourne un encadrement de  $h_0$

```
1 def f(h):
2     return 18*h**2-h**3-576
3
4 def dichotomie(amplitude):
5     a=7
6     b=8
7     while b-a>amplitude:
8         m=(a+b)/2
9         if f(m)>0:
10            b=m
11        else:
12            a=m
13        print("la hauteur recherchée est entre ",a, " et " , b)
14
15 dichotomie(0.001)
```

En cours d'exécution: essaimu.py

La hauteur recherchée est entre 7.35546875 et 7.3564453125

f) Construire une fonction en Python qui prend en argument un volume d'eau quelconque d'eau  $V_{cau}$  versé dans l'aquarium (exprimé en  $cm^3$ ) et l'amplitude souhaité a puis retourne un encadrement d'amplitude a de la hauteur correspondante

Il suffit de rechercher l'équation vérifiée par la hauteur  $h$  . Si on verse  $V_{cau}$  dans l'aquarium, on a donc :

$$6\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3} = V_{cau} \text{ donc } h \text{ est solution de l'équation } 6\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3} - V_{cau} = 0$$

Il suffit donc de modifier la fonction  $f(h)$  ainsi :

```
1 from math import *
2 def f(h,Veau):
3     return 6*pi*h**2-pi*h**3/3-Veau
4
5 def dichotomie(amplitude,Veau):
6     a=0
7     b=12
8     while b-a>amplitude:
9         m=(a+b)/2
10        if f(m,Veau)>0:
11            b=m
12        else:
13            a=m
14        print("la hauteur recherchée est entre ",a, " et " , b)
15
16 dichotomie(0.01,288*pi)
```

En cours d'exécution: essaimu.py

```
la hauteur recherchée est entre 11.994140625 et 12
>>>
```