DM 2

Il s'agit d'un QCM issu d'un concours . Une seule réponse est correcte par question .
Déterminer la bonne réponse en justifiant votre choix

M1 Etant donné deux réels non nuls a et b , la quantité $\left(\dfrac{b+\frac{1}{a}}{b}\right)a$ est systématiquement égale à :

A) Aucune des réponses B) $b+\frac{1}{b}$ C) $a+\frac{1}{b}$ D) $a+\frac{1}{a}$ E) $a+1$

$$\left(\frac{b+\frac{1}{a}}{b}\right)a = \left(b+\frac{1}{a}\right)\times\frac{a}{b} = a+\frac{1}{b}$$

M2 L'équation $x^3+x=2x^2$ a pour solution(s) :

A) 0 et 1 B) 1 C) x = 0, x = 1 et un autre nombre réel D) 0 E) 0 et −1

$x^3+x=2x^2$ equiv $x(x^2-2x+1)=0$ equiv $x(x-1)^2=0$ donc deux solutions 0 et 1

M3 La somme des solutions distinctes de l'équation $\sqrt{x^3+x}=\sqrt{2}x$ vaut :

A) 3 B) 2 C) 0 D) -2 E) 1

$\sqrt{x^3+x}=\sqrt{2}x$ equiv $x^3+x=2x^2$ avec x ≥ 0 donc deux solutions 0 et 1 donc somme = 1

M4 Soit a et b deux réels tels que a ≥ $|b|$. Le carré de $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ vaut systèmatiquement

A) $2(|a|-|b|)$ B) $2(a+b)$ C) $-2(a+b)$ D) $2(a+|b|)$ E $2(|a|+b)$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 &= a+\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\times\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}+a-\sqrt{a^2-b^2}\\ &= 2a+2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})}\\ &= 2a+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}\\ &= 2a+2\sqrt{b^2}\\ &= 2a+2|b|\end{aligned}$$

M5 Soit x un reel strictement positif. La quantité A = $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$ est alors égale à :

A) $\dfrac{2x+1}{x+1}$ B) aucune des réponses proposées C) x D) $\dfrac{3x+2}{2x+1}$ E) $\dfrac{2x+1}{3x+2}$

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{x}{x+1}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}} = \frac{1}{1+\frac{x+1}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}} = \frac{2x+1}{3x+2}$$

M6 Soit a , b et c trois réels. L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes si

A) a > 0 et b > 0 B) a < 0 et c < 0 C) b et c de même signe D) a et c de signes contraires

$\Delta = b^2-4ac$ si a et c sont de signes contraires alrs ac est négatif d'où -ac est positif et Δ est strictement positif et l'équation a deux sol distinctes

M7 Le nombre d'entiers relatifs x vérifiant $9^{\left(x^2\right)}=3^{x+1}$ est :

A) au moins égal à 4 B) 1 C) 2 D) 0 E) 3

$9^{x^2} = (3^2)^{x^2} = 3^{2x^2} = 3^{x+1}$

$2x^2 = x+1$

$2x^2-x-1=0$

le delta est strictement positif donc deux solutions x = 1 et x = $-\frac{1}{2}$ donc réponse B

M8 On dispose de deux entiers relatifs x et y et on sait que : $4^x=8\times2^{x+y}$ et $9^{x+y}=243\times3^{5y}$

Le produit xy est égal à :

A) 10 B) 12 C) une autre valeurs que celles proposées

D) on ne peut pas savoir E) 4

$4^x=8\times2^{x+y}$ $\qquad$ $9^{x+y}=243\times3^{5y}$

$(2^2)^x = 2^3\times2^{x+y}$ $\qquad$ $(3^2)^{x+y} = 3^5\times3^{5y}$

$2^{2x} = 2^{3+x+y}$ $\qquad$ $3^{2x+2y} = 3^{5+5y}$

$2x = 3+x+y$ $\qquad$ $2x+2y = 5+5y$

Il faut donc résoudre le système $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+y \\ 2(3+y)-3y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+y \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$