

Durée 3 heures

SANS calculatrice, vous commencerez ce devoir par le QCM et les exercices 1 et 2.

Après avoir rendu votre copie, **vous pourrez alors utiliser votre calculatrice** pour l'exercice 3 qui sera rédigé sur une copie séparée

Partie QCM (6 points)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, **reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse**

Question 1 Après une hausse de 20%, un téléviseur coûte 600€. Son prix avant augmentation était :

Le CM = 1,2 et on a $\frac{600}{1,2} = 500$

- a. 720€ b. 100€ c. 500€ d. Environ 588€

Question 2.

On considère le programme écrit en langage Python ci-contre.

L'appel f(3) renvoie :

```
def f(n) :
    x = 5
    for i in range(n):
        x=2+3*x
    print(x)
```

- a. 17 53 161 b. 161 c. 17 53 161 485 d. 485

Question 3 L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ est :

$$\frac{10x+3}{15} \geq \frac{-3x+1}{6}$$

$$60x+18 \geq -45x+15$$

$$105x \geq -3$$

$$x \geq -\frac{3}{105} = -\frac{1}{35}$$

- a. $\left[-\frac{1}{35}; +\infty\right[$ b. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ c. $\left[-\frac{7}{180}; +\infty\right[$ d. $\left]-\infty; -\frac{6}{210}\right]$

Question 4 Si on simplifie l'expression $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 3^{n-1}$, on obtient :

- a. $3^n \times 27$ b. $-2 \times 3^{n-1}$ c. -3^n d. $3^{n-1} \times 4$

Question 5 $2 \times \frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{4}$ est égal à : a. $\frac{46}{24}$ b. $\frac{11}{4}$ c. $\frac{53}{12}$ d. $\frac{23}{12}$

Question 6 Les solutions de l'inéquation $-x(x-3)(-2x+4) \geq 0$ sont :

Un tableau de signe de l'expression donne :

- a. $[0; 2] \cup [3; +\infty[$ b. $[2; 3]$ c. $]-\infty; 0] \cup [2; 3]$ d. $[-2; 3]$

Question 7 On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u}$. On peut affirmer que :

$$\frac{y+x}{xy} = \frac{1}{u} \text{ on prend ensuite l'inverse}$$

$$\frac{xy}{x+y} = u$$

a. $u = \frac{xy}{x+y}$

b. $u = \frac{x+y}{xy}$

c. $u = xy$

d. $u = x+y$

Question 8 On lance un dé à 4 faces. La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau.

Face numero 1	Face numero 2	Face numero 3	Face numero 4
0,5	$\frac{1}{6}$	0,2	x

$$0,5 + \frac{1}{6} + 0,2 + x = 1$$

$$x = 0,3 - \frac{1}{6} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{9}{30} - \frac{5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

On peut affirmer que : a. $x = \frac{2}{15}$ b. $x = \frac{2}{3}$ c. $x = 0,4$ d. $x = 0,1$

Question 9 On donne ci-contre la parabole d'équation $y = x^2$.

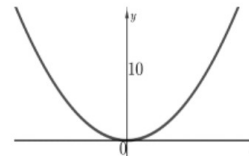
L'inéquation $x^2 \geq 10$ est équivalente à :

a. $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

b. $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$

c. $x \geq \sqrt{10}$

d. $x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$



Question 10 On a représenté ci-contre une droite D dans un repère orthonormé.

L'équation de la droite D est :

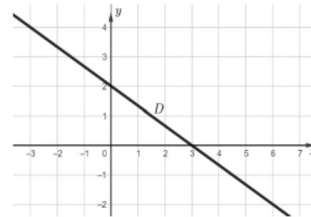
On teste les équations avec les points

de coordonnées (0;2) et (3;0)

a. $y = -\frac{3}{2}x + 2$ b. $y = \frac{2}{3}x + 2$

c. $2x - 3y - 6 = 0$

d. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$



Question 11 Voici une série de notes avec les coefficients associés

Note	10	8	16
coefficient	1	2	x

On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 15$?

La moyenne est $m = \frac{10+16+16x}{1+2+x} = \frac{26+16x}{3+x} = 15$ donc $26+16x = 45+15x$

$$x = 19$$

a. impossible

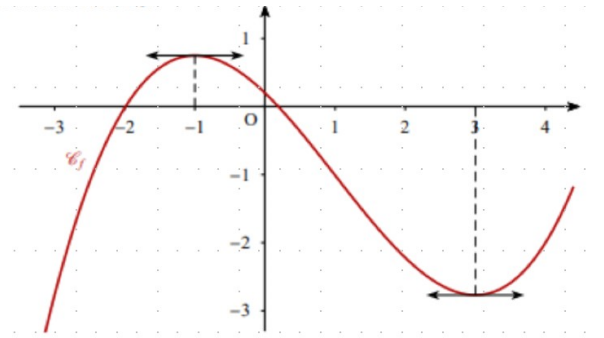
b. $x = 10^{-3}$

c. $x = 3$

d. $x = 19$

Question 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. Deux tangentes horizontales ont été représentées celles en -1 et celle en 3



$f'(-1) \times f'(3)$ est :

- a. strictement positif b. strictement négatif **c. égal à 0** d. égale à $f'(-3)$

les tangentes sont horizontales en -1 et 3 donc $f'(-1) = f'(3) = 0$ d'où le produit vaut 0

Exercice 1 (9 points)

Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n^2 + 2n - 1, \quad v_n = \frac{n^2}{3^n}, \quad w_0 = -2 \text{ et } w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{5}{2}$$

1) Calculer les trois premiers termes de chacune de ces suites .

$$u_0 = -1$$

$$v_0 = 0$$

$$w_0 = -2$$

$$u_1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$v_1 = \frac{1}{3}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = 2 \times 4 + 2 \times 2 - 1 = 11$$

$$v_2 = \frac{4}{9}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}w_1 + \frac{5}{2} = \frac{13}{4}$$

$$w_3 = \frac{1}{2}w_2 + \frac{5}{2} = \frac{33}{8}$$

2) a) Exprimer u_{n+1} puis v_{n+2} en fonction de n

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 = 2n^2 + 6n + 3$$

$$v_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}$$

b) Exprimer w_{n+2} en fonction de w_n

$$w_{n+2} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{5}{2} \text{ or } w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{5}{2} \text{ donc } w_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}w_n + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}w_n + \frac{15}{4}$$

3) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 6n + 3 - 2n^2 - 2n - 1 = 4n + 4$

or $4n + 4 > 0$ car n est positif d'où $u_{n+1} - u_n > 0$

$$u_{n+1} > u_n$$

la suite est donc croissante

4) a) Etudier le signe de $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 > 0 \text{ donc deux racines } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{-4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1,35$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	-	0	+	0	-

b) Démontrer que pour tout entier n , $v_{n+1} - v_n = \frac{-2n^2 + 2n + 1}{3^{n+1}}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} - \frac{n^2}{3^n} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 3n^2}{3^{n+1}} = \frac{-2n^2 + 2n + 1}{3^{n+1}}$$

c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

D'après la question précédente, pour tout $n \geq x_2 \geq 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$

La suite est donc décroissante à partir du rang 2

d) A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de la suite (v_n)

On peut conjecturer 0 comme limite

5) a) On donne le programme python suivant : $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{5}{2}$

```

w = -2
for i in range ( 0 ; 15 ) :
    w =  $\frac{1}{2}w + \frac{5}{2}$ 
print (w)
```

Compléter ce programme afin de calculer w_{15}

b) A l'aide de votre calculatrice, calculer w_{15} . On donnera la valeur approchée au dix millièmes

$$w_{15} \approx 4,999786377$$

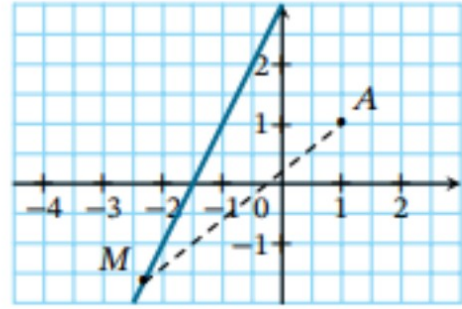
c) Conjecturer la limite de la suite (w_n)

On peut conjecturer 5 comme limite

Exercice 2 (5 points)

On considère la droite d d'équation $y = 2x+3$ et A le point de coordonnées $(1;1)$.

M est un point quelconque de la droite d et on note x l'abscisse de M



1) On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$

a) Justifier que l'ordonnée de M est $y = 2x+3$

M est sur la droite d donc son ordonnée est $2x+3$

Vérifier que $f(x) = 5x^2+6x+5$

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \\ &= (x - 1)^2 + (2x + 3 - 1)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 8x + 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = 5x^2 + 6x + 5$$

On rappelle que la formule de la distance entre deux points :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

b) Justifier que $f(x) = 5(x+0,6)^2+3,2$. Comment s'appelle cette forme ?

$$5(x+0,6)^2+3,2 = \dots = 5x^2+6x+5 \quad \text{c'est la forme canonique}$$

c) Etudier les variations de la fonction f.

Pour quelle valeur x_0 la fonction f atteint-elle son extremum ?

Le sommet de la parabole est S(-0,6;3,2) (d'après la forme canonique)

et comme $a = 5 > 0$ la parabole a ses branches tournées vers le haut donc

f est décroissante sur $]-\infty ; -0,6]$ et croissante sur $[0,6; +\infty[$

d) M_0 est le point de la droite d tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6;1,8)$

$$AM^2 \text{ est minimale pour } x = -0,6 \text{ et on a alors } 2x+3 = 2 \times (-0,6)+3 = 1,8 \text{ donc } M_0(-0,6;1,8)$$

2) On considère le point B de coordonnées $(0;3)$

a) Après avoir remarqué que B est sur la droite d, déterminer la nature du triangle ABM_0

$$AB^2 = f(0) = 5 \quad AM_0^2 = f(-0,6) = 3,2 \quad BM_0^2 = (-0,6-0)^2 + (1,8-3)^2 = 0,36+1,44 = 1,8$$

Le triangle est donc rectangle **(d'après la réciproque du th de Pythagore)**

b) Que peut-on en déduire des droites (AM_0) et d ?

elles sont perpendiculaires

Exercice 3 (10 points) (Changer de copie)

PARTIE A

1) Parmi les nombres ci-dessous, un seul n'admet pas le même point image sur le cercle trigonométrique .
Lequel et pourquoi ?

$$\frac{29\pi}{6} ; \frac{125\pi}{6} ; -\frac{31\pi}{6} ; -\frac{85\pi}{6}$$

$$\frac{29\pi}{6} - 4\pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{31\pi}{6} + 6\pi = \frac{5\pi}{6}$$

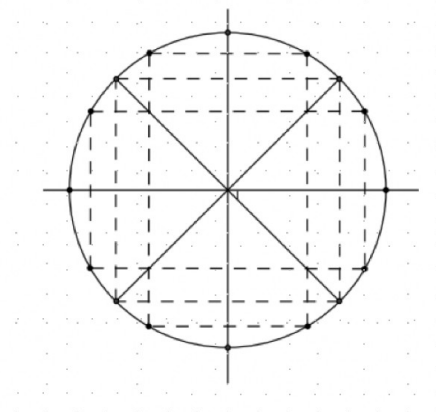
$$\frac{125\pi}{6} - 20\pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{85\pi}{6} + 14\pi = -\frac{\pi}{6}$$

2) Sur le cercle trigonométrique ci-joint, placer soigneusement les points suivants :

$$A\left(-\frac{4\pi}{3}\right) ; B\left(-\frac{13\pi}{2}\right) ; C\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D\left(-\frac{21\pi}{4}\right) ; E\left(\frac{29\pi}{6}\right) ; F(317\pi)$$



3) Soit x_1 , x_2 , x_3 trois mesures principales telles que :

$$\begin{cases} \cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x_3 = 0 \\ \sin x_3 < 0 \end{cases}$$

Donner les valeurs de x_1 , x_2 et x_3 .

$$x_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

4) Soit $x \in [-\pi; 0]$. Déterminer $\sin x$ sachant que $\cos x = \frac{1}{5}$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) + \frac{1}{25} = 1$$

$$\sin^2(x) = \frac{24}{25} \text{ et comme } x \in [-\pi; 0], \sin(x) < 0 \text{ donc}$$

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

PARTIE B

On lance une balle en l'air et on étudie la hauteur de la balle en fonction du temps. On admet que, tant que la balle est en l'air, sa hauteur en mètres est donnée par la fonction h définie par

$$h(t) = -4t^2 + 16t + 2$$

où t est le temps exprimé en seconde. L'expérience commence à $t = 0$.

Déterminer :

1) la hauteur initiale h_0 à partir de laquelle la balle est lancée

$$h_0 = h(0) = 2 \text{ m}$$

2) a) le temps t_m au bout duquel la hauteur maximale est atteinte

$$-\frac{b}{2a} = 2 \text{ et } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -4 \times 4 + 16 \times 2 + 2 = 18$$

le sommet de la parabole est S(2;18) donc comme $a = -4 < 0$ les branches sont vers le bas donc le temps est de 2 s

b) la hauteur maximale h_m atteint par la balle

La hauteur max de 18 m

3) le temps t_1 au bout duquel la balle touche le sol

il faut résoudre $f(t) = 0$

$$-4t^2 + 16t + 2 = 0$$

$$\Delta = 288$$

$$x_1 = \frac{-16 - \sqrt{288}}{-8}$$

$$x_2 = \frac{-16 + \sqrt{288}}{-8}$$

$$x_1 = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} < 0 \text{ ne convient pas}$$

$$\text{donc } t_1 = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

4) le temps durant lequel la balle reste à une hauteur supérieure à 9 m

Il faut résoudre $h(t) \geq 9$

$$-4t^2 + 16t + 2 \geq 9$$

$$-4t^2 + 16t - 7 \geq 0$$

$$\Delta = 144$$

$$t_1 = \frac{-16 - 12}{-8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$t_2 = \frac{-16 + 12}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ secondes au dessus de 9 m}$$