

Vendredi 24 janvier 2014 2 heures

Exercice 1 :	def seuil() :
On considère l'algorithme ci-contre :	N=0
	U=20
	while U ≤ 100 :
	N = N+1
	U = 2U - 5
	print(N)

- Cet algorithme utilise une suite définie par une relation de récurrence . $\begin{cases} U_0=20 \\ U_{n+1}=2U_n-5 \end{cases}$
- Que fait cet algorithme ? **Il affiche le rang du premier terme de la suite supérieur à 100**
- Quelle valeur de N va afficher cet algorithme ?
N=0 , U = 20 ; N = 1 , U=35 , N=2 , U = 70 , N = 3 , U = 135 donc il affiche N = 3

Exercice 2 : Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n + \frac{1}{2n-1}$ pour tout $n \geq 1$

Démontrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{4n^2 - 3}{4n^2 - 1}$

$$v_{n+1} - v_n = n + 1 + \frac{1}{2(n+1)-1} - n - \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{(2n-1)(2n+1) + (2n-1) - (2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{4n^2 - 1 + 2n - 1 - 2n - 1}{4n^2 - 1} = \frac{4n^2 - 3}{4n^2 - 1}$$

Comme $n \geq 1$, $n^2 \geq 1$ d'où $4n^2 \geq 4$ on a donc $4n^2 - 1$ et $4n^2 - 3$ qui sont positifs d'où le quotient aussi et $v_{n+1} - v_n > 0$ cad $v_{n+1} > v_n$ donc suite croissante

Exercice 3 : On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 5} \end{cases}$

- $u_1 = \frac{5}{7}$, $u_2 = \frac{5}{9}$, $u_3 = \frac{5}{11}$
- a) Programmer cette suite sur votre calculatrice et émettre deux conjectures : une sur le sens de variation de la suite et l'autre sur la limite de la suite. Suite qui semble décroissante et de limite 0

b) Suite décroissante : pour tout n , $u_{n+1} < u_n$

limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

- On admet que (u_n) est une suite dont tous les termes sont positifs.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{2u_n + 5} - u_n = \frac{5u_n - u_n(2u_n + 5)}{2u_n + 5}$ d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2}{2u_n + 5}$

b) On sait que $u_n \geq 0$ et comme un carré est un nombre positif, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ cad $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante

- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$

a) $v_0=1$, $v_1=\frac{7}{5}$, $v_2=\frac{9}{5}$, $v_3=\frac{11}{5}$

b) Il semble que $v_{n+1} = v_n + \frac{2}{5}$

c) $v_1=v_0+\frac{2}{5}$ $v_2=v_1+\frac{2}{5} = v_0+2\times\frac{2}{5}$, etc... $v_n=v_0+n\times\frac{2}{5} = 1+\frac{2n}{5} = \frac{5+2n}{5}$ et comme

$u_n=\frac{1}{v_n}$ on en déduit que $u_n=\frac{5}{5+2n}$

5) Ecrire un algorithme permettant de calculer le terme de rang n de la suite (u_n)

Variable : U, n

Traitement :

 Lire n

 U prend la valeur $5/\{5+2*n\}$

 Afficher U