Exercice 1

1) a) f(0) = 2 donc 0 n'est pas racine

b) f(x) = $x^4\left(2-\frac{9}{x}+\frac{14}{x^2}-\frac{9}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)$

or $f\left(\frac{1}{x}\right)$ = $\frac{2}{x^4}-\frac{9}{X^3}+\frac{14}{x^2}-\frac{9}{x}+2$ d'où la réponse

c) Si α est racine de f alors $f(\alpha)$ = 0 d'où

$f(\alpha)=(\alpha)^4 f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ = 0 or $\alpha \neq 0$ donc $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ = 0

2) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

$2x^2+\frac{2}{x^2}-9x-\frac{9}{x}+14=0$

$\frac{2x^4+2-9x^2-9x+14x^2}{x^2}=0$

$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

3) a) u = $x+\frac{1}{x}$ donc u^2 = $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

= $x^2+2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2$

= $x^2+2+\frac{1}{x^2}$

3) b) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

$2(u^2-2)-9u+14=0$

$2u^2-4-9u+14=0$

$2u^2-9u+10=0$

c) Δ = 1 > 0 deux racines u_1 = 2 ou u_2 = $\frac{5}{2}$

$x+\frac{1}{x}$ = 2	$x+\frac{1}{x}$ = $\frac{5}{2}$
$x^2-2x+1=0$	$2x^2-5x+2=0$
$(x-1)^2=0$	Δ = 9 > 0 deux solutions
x = 1	x_1 = 2 ou x_2 = $\frac{1}{2}$

172 Équation symétrique

On considère la fonction polynôme de degré 4 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$.

1. a. Vérifier que 0 n'est pas racine de f.

b. Montrer que pour tout réel x non nul :

$$f(x)=x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)$$

c. En déduire que si le réel non nul α est racine de f, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine de f.

2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ est équivalente à l'équation $(E): 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$.

3. Pour $x \neq 0$, on pose : $u=x+\frac{1}{x}$.

a. Calculer u^2.

b. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $(E'): 2u^2-9u+10=0$, avec $u=x+\frac{1}{x}$.

c. Résoudre l'équation $2u^2-9u+10=0$.

d. En déduire les solutions de l'équation $f(x)=0$.

Exercice 2

1) On considère deux nombres x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = P$

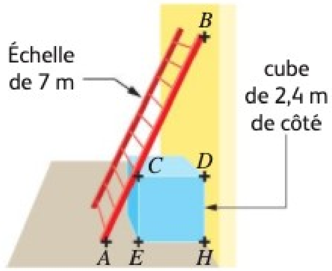
Montrer que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

2)

182 L'échelle et le cube

Une échelle de longueur 7 m s'appuie en A sur le sol, en B au mur et en C sur une arête d'un bloc cubique de 2,4 m de côté.

En sachant que HA est plus petit que HB, calculer l'empiétement HA et la hauteur HB.



Aide

Commencer par déterminer $HA + HB$ et $HA \times HB$.

Le th de Thalès donne $\frac{AH}{AE} = \frac{BH}{CE}$

$AH \times CE = AE \times BH$

$2{,}4 AH = (AH - 2{,}4) \times BH$

d'où $2{,}4(AH + BH) = AH \times BH$

Le th de Pythagore donne :

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

$(AH + BH)^2 - 2\,AH \times BH = 49$

$(AH + BH)^2 - 2 \times 2{,}4(AH + BH) = 49$

On pose X = AH+BH d'où

$X^2 - 4{,}8X - 49 = 0$

$\Delta = 219{,}04 = 14{,}8^2$

$X_1 = -5$ ou $X_2 = 9{,}8$

X_1 est négatif donc ne convient pas d'où AH+BH = 9,8 et donc AH*BH = $2{,}4 \times 9{,}8$ = 23,52

AH et BH sont donc solution de $X^2 - 9{,}8X + 23{,}52 = 0$

$\Delta = 1{,}96$

$X_1 = 4{,}2 = AH$ et $X_2 = 5{,}6 = BH$