DM1 Première

Exercice 1

1) Développer $(8-x)^2$ et en déduire une factorisation de $x^2-16x+48$ et de $17-x^2+16x$

$(8-x)^2 = 64-16x+x^2$

$x^2-16x+48 = x^2-16x+64-16 = (8-x)^2-16 = (8-x-4)(8-x+4) = (4-x)(12-x)$

$17-x^2+16x = -(x^2-16x-17) = -(x^2-16x+64-81) = -((8-x)^2-81) =$
$-(8-x-9)(8-x+9) = -(-x-1)(-x+17) = (x+1)(-x+17)$

2) Peut-on factoriser $x^2-16x+65$? et $16x-x^2-68$?

$x^2-16x+65 = (8-x)^2+1$ somme de deux carrés donc on ne peut pas factoriser

$16x-x^2-68 = -(x^2-16x+68) = -((8-x)^2+4)$ somme de deux carrés donc on ne peut pas factoriser

3) Pour quelle valeur de m l'expression $x^2-16x+m$ n'est-elle pas factorisable ?

$x^2-16x+m = x^2-16+64+m-64 = (8-x)^2+m-64$

Pour ne pas être factorisable , $m-64$ doit être strictement positif donc $m-64>0$ cad $m>64$

4) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 6 et AB = 16. Soit D un point du segment [AC] . On construit le point E du segment [AB] tel que BE = AD et on pose AD = x
Comment faut-il choisir x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?

Aire du triangle rectangle : $\frac{AB\times AC}{2}$ = 48

Aire du triangle ADE : $\frac{AD\times AE}{2} = \frac{x\times(16-x)}{2} = \frac{16x-x^2}{2}$

On veut $\frac{16x-x^2}{2} = \frac{48}{2}$ d'où $x^2-16x+48=0$

D'après la question 1) on a donc : $(4-x)(12-x)=0$

EPN solution : x = 4 et x = 12

Exercice 2

Une fonction polynôme du second degré vérifie les conditions suivantes :

$$f(0)=0 \text{ et pour tout réel x, } f(x+1)-f(x)=x$$

1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$

$f(0+1)+f(0)=0$ d'où $f(1)=0$ $\qquad$ $f(1+1)+f(1)=1$ d'où $f(2)=1-f(1)=1$

2) En déduire que $f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$

f possède deux racines 1 et 2 donc f peut se factoriser : f(x) = $a(x-0)(x-1)$ = $ax(x-1)$

Or on sait que f(2) = 1 donc $a\times 2(2-1)=1$ cad a = $\frac{1}{2}$ d'où $f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$

3) Pour tout entier naturel n ≥ 1 , on note : S_n = $1+2+3+4+\ldots+n$

Montrer que S_n = $f(n+1)$

En déduire l'expression de S_n en fonction de n

S_n = $1+2+3+4+\ldots+n$

$$\begin{aligned}
1 &= f(1+1)-f(1)\\
2 &= f(2+1)-f(2)\\
3 &= f(3+1)-f(3)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
n &= f(n+1)-f(n)
\end{aligned}$$

on ajoute : $1+2+3+\ldots+n$ = $f(n+1)-f(1)$ = f(n+1)

On a donc $1+2+3+\ldots+n$ = $\frac{1}{2}(n+1)(n)$