Mini bac mathématiques
Première B

Jeudi 7 novembre 2024

2 heures

Calculatrice en mode examen

Exercice 1 Soit m un nombre réel . On considère l'équation (E_m) définie par :

$$(\mathrm{E}_m) \quad : \quad (m-3)x^2+(m+2)x+m+5=0$$

1) a) Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) n'est-elle pas du second degré ?

L'équation est du second degré pour $m \neq 3$

b) La résoudre dans un tel cas

pour m = 3 , l'équation devient 5x+8 = 0 d'où x = $-\frac{8}{5}$

2) a) Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle x = 0 comme solution ?

Il faut que m+5 = 0 cad m = -5

b) La résoudre dans un tel cas .

Pour m = -5 , l'équation devient $-8x^2-3x=0$

$$x(-8x-3)=0$$

x = 0 ou x = $-\frac{3}{8}$

3) a) Déterminer l'ensemble D des réels m pour lequels l'équation (E_m) admet exactement une solution

On calcule le discriminant : $\Delta = (m+2)^2-4(m-3)(m+5)$

$$\Delta = m^2+4m+4-4(m^2+5m-3m-15)$$

$$\Delta = -3m^2-4m+64$$

On veut une seule solution donc $\Delta = 0$ d'où on calcule le discriminant du discriminant :

$\Delta' = 16-4\times(-3)\times 64 = 784 > 0$ donc deux solutions :

m_1 = ... = 4 ou m_2 = ... = $-\frac{16}{3}$

b) Déterminer, pour tout m de D, cette solution unique

m_1 = 4 donc (E_1) : $x^2+6x+9=0$ $\quad (x+3)^2=0$ $\quad$ et x = -3

$m_2 = -\frac{16}{3}$ donc $\left(\mathrm{E}_{-\frac{16}{3}}\right)$: $\left(-\frac{16}{3}-3\right)x^2+\left(-\frac{16}{3}+2\right)x-\frac{16}{3}+5=0$

$$-\frac{25}{3}x^2-\frac{10}{3}x-\frac{1}{3}=0$$

$$25x^2+10x+1=0$$

$$(5x+1)^2=0$$

x = $-\frac{1}{5}$

Exercice 2 On considère le trinome du second degré P défini sur ℝ par P(x) = $4x^2-(\sqrt{6}+4\sqrt{3})x+3\sqrt{2}$

1) Montrer que P admet pour racine x = $\frac{\sqrt{6}}{4}$

$4x^2-(\sqrt{6}+4\sqrt{3})x+3\sqrt{2} = 4\times\left(\frac{6}{16}\right)-(\sqrt{6}+4\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{2} = \frac{6}{4}-\frac{6}{4}-\sqrt{18}+\sqrt{18}$ = 0 d'où la réponse

2) Trouver alors l'autre racine **sans calculer le discriminant** (en valeur exacte)

La somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ donc $\frac{\sqrt{6}}{4}+x_2=\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{4}$

$x_2 = \sqrt{3}$

Exercice 3 On considère la fonction P définie sur ℝ par : P(x) = $(x^2+1)^2-(4x+2)^2$

1) Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré

P(x) = $x^4+2x^2+1-(16x^2+16x+4) = x^4-14x^2-16x-3$

polynôme de degré 4

2) Montrer que P(x) = $(x^2-4x-1)(x^2+4x+3)$

$(x^2-4x-1)(x^2+4x+3)$ = .. on développe .. = $x^4-14x^2-16x-3$ = P(x)

OU

on factorise

P(x)= $(x^2+1)^2-(4x+2)^2 = a^2-b^2 = (x^2+1-4x-2)(x^2+1+4x+2) = (x^2-4x-1)(x^2+4x+3)$

3) Résoudre alors l'équation P(x) = 0

$(x^2-4x-1)(x^2+4x+3) = 0$

EPN donc

$x^2-4x-1=0$ ou $x^2+4x+3=0$

$\Delta = 12$ $\Delta = 4$

$x_1 = 2-\sqrt{3}$ $x_3 = -1$

$x_2 = 2+\sqrt{3}$ $x_4 = -3$

Exercice 4 On considère les fonctions polynômes f et g définies sur ℝ par :

f(x) = $2x^2-5x+3$ et g(x) = $-2x^2+11x-17$

1) Résoudre l'équation f(x) = g(x)

$2x^2-5x+3 = -2x^2+11x-17$

$4x^2-16x+20 = 0$

Δ = -64 < 0 donc l'équation n'a pas de solution

2) a) Démontrer que le taux de variation de f entre 1 et 1+h est donné par $t(h) = 2h-1$

t(h) = $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

f(1+h) = $2(1+h)^2-5(1+h)+3 = \ldots = 2h^2-h$ et f(1) = 0

d'où t(h) = $\frac{2h^2-h-0}{h} = \frac{h(2h-1)}{h} = 2h-1$

b) En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \lim\limits_{h \to 0} 2h - 1 = -1$

Comme cette limite existe, f est dérivable en 1 et on a f'(1) = -1

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$y = -1(x-1)+0$$

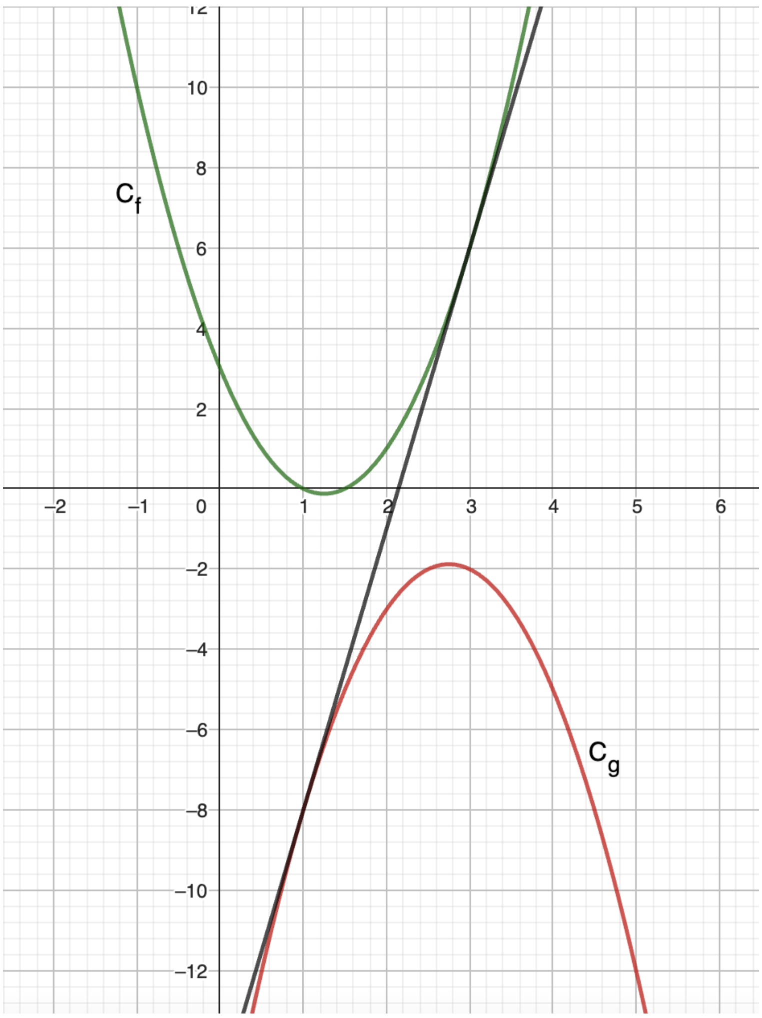
$$y = -x+1$$

d) Construire cette tangente dans le repère donné ci-dessous

e) Conjecturer alors la valeur de $g'(3)$. On expliquera la démarche

D'après la figure la tangente à C_f en 1 est tangente à C_g en 3

La tangente à C_g en 3 a donc pour équation y = -x+1 donc son coef directeur correspond à $g'(3)$ d'où g'(3) = -1



2) Sur le graphique donné ci-contre, on a tracé la tangente à C_g au point d'abscisse 1.

a) Lire sur le graphique la valeur de $g'(1)$.
On pourra penser à vérifier à l'aide de la calculatrice

On peut lire $g'(1) = 7$

b) Déterminer alors l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 1

$y = g'(1)(x-1)+g(1)$

$y = 7(x-1)-8$

$y = 7x-15$

c) Résoudre l'équation $f(x)=7x-15$.

$2x^2-5x+3 = 7x-15$

$2x^2-12x+18 = 0$

$\Delta = 0$

donc une solution $x_0 = \dfrac{12}{4} = 3$

la tangente

e) Conjecturer alors la valeur de $f'(3)$. On expliquera la démarche

La tangente à C_g en 1 est aussi la tangente à C_f en 3 d'où $f'(3)$ = coef dir de la tangente à C_g en 1 = 7

Exercice 6 Dans la ville de New York, une nouvelle forme de grippe a fait son apparition.

Dans un premier temps, les autorités décident de lancer une étude et de faire effectuer un test de dépistage aux habitants afin d'identifier les malades. C'est l'objet de **la partie A**

Dans un second temps, les autorités mettent en place des mesures sanitaires afin de soigner les malades à laide d'un vaccin. C'est l'objet de **la partie B**

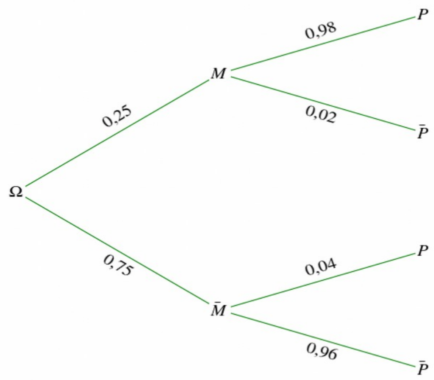
Ces deux parties sont indépendantes

Partie A : Mise en place de tests de dépistage

1) A partir des informations figurant dans l'énoncé, donner les probabilités p(M) , $p_M(P)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{P})$

$$p(M) = 0{,}25\ ,\quad p_M(P) = 0{,}98 \text{ et } P_{\overline{M}}(\overline{P}) = 0{,}96$$

2) Contruire un arbre pondéré illustrant la situation



3) Déterminer la probabilité que l'habitant rencontré soit malade et que le test soit positif

$$P(M\cap P) = 0{,}25\times 0{,}98 = 0{,}245$$

4) Montrer que p(P) = 0,275 et interpréter ce résultat

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'aprés la formule des probabilité totale on a :

$$p(P) = P(M\cap P)+P(\overline{M}\cap P)$$
$$= 0{,}245+0{,}75\times 0{,}04$$
$$= 0{,}275$$

5) Déterminer la probabilité que le test donne un bon diagnostique

Le test donne un bon diagnostique (noté B) si la personne est malade et le test est positif ou si la personne n'est pas malade et le test est négatif ce qui donne

$$P(B) = P(M\cap P)+P(\overline{M}\cap\overline{P}) = 0{,}245+0{,}75\times 0{,}96 = 0{,}965$$

6) Sachant que le test est négatif, déterminer la probabilité que l'habitant rencontré soit malade.

On veut $P_{\overline{P}}(M) = \dfrac{P(\overline{P}\cap M)}{P(\overline{P})} = \dfrac{0{,}25\times 0{,}02}{1-0{,}275} \approx 0{,}00689$

Partie B : Mise en place de mesures sanitaires

A la suite de l'apparition de cette nouvelle forme de grippe, les autorités prennent rapidement des mesures sanitaires et vaccinent les habitants de la ville .

On étudie ensuite l'efficacité de ce vaccin auprés de 2500 habitants de New York qui étaient malades et qui ont été vaccinés. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Habitants de moins de 25 ans	Habitants entre 26 et 59 ans	Habitants de plus de 60 ans	Total
Habitants qui sont restés malades après l'injection du vaccin	141	186	153	480
Habitants qui ont été gueris après l'injection du vaccin	411	842	767	2020
Total	552	1028	920	2500

Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme décimale

On rencontre un habitant au hasard parmi les 2500 habitants de l'étude

Chacun d'entre eux a la même probabilité d'être rencontré.

On considère les événements suivants :

- G : « l'habitant rencontré a été guéri après l'injection du vaccin »
- A : « l'habitant rencontré a plus de 60 ans »

1) a) Déterminer la probabilité de l'événement G

$$P(G) = \frac{2020}{2500} = 0{,}808$$

b) Déterminer la probabilité de l'événement A

$$P(A) = \frac{920}{2500} = 0{,}368$$

2) Définir à l'aide d'une phrase l'événement $G \cap A$ puis déterminer sa probabilité

$G \cap A$: l'habitant est gurei et a plus de 60 ans

$$P(\ G \cap A\ ) = \frac{767}{2500} = 0{,}3068$$

3) L'habitant a été guéri après l'injection du vaccin.

Déterminer la probabilité que cet habitant ait plus de 60 ans. On arrondira à 0,1 près

$$P_G(A) = \frac{767}{2020} \approx 0{,}3797 \approx 0{,}4$$

__**Exercice BONUS**__ *Toute trace de recherche sera valorisée.*

Raoul le dit lui-même :

« je ne triche que rarement, disons 5 % du temps, mais quand je triche je gagne à coup sûr ! »

Ce soir, il joue à un jeu de plateau avec quatre de ses amis et comme ils sont tous de même niveau, on estime qu'ils ont tous une probabilité de victoire de $\frac{1}{5}$, si Raoul ne triche pas....

Raoul gagne une partie, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?