<u>MINI BAC 1</u> <u>Classe de première</u> <u>Spécialité mathématique</u>

Le Jeudi 16 novembre 2023 , durée 2 heures

Sujet 1

Toute trace de recherche sera valorisée donc ne pas hésiter à proposer une réponse ou un début de réponse

<u>Exercice 1</u> *Les questions de cet exercice sont indépendantes* **5,5 points**

Aucune valeur approchée ne sera acceptée et les réponses seront justifiées

1) **Sujet 1** Soit R(x) = $5x^2-30x+40$

a) Calculer les racines de R

$\Delta = 900-800=100 > 0$ deux racines

x_1 = ... = 4 et x_2 = ... = 2

b) Déterminer la forme canonique de R

R(x) = $5(x-3)^2-5$

c) Dresser le tableau de signe de R(x)

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
R(x)		+	0	–	0	+	

Sujet 2 Soit R(x) = $2x^2-30x+28$

a) Calculer les racines de R

$\Delta = 900-224=676 > 0$ deux racines

x_1 = ... = 1 et x_2 = ... = 14

R(x) = $2(x-7{,}5)^2-84{,}5$

2) Henri a commencé l'écriture d'une fonction en langage python afin d'obtenir les variations d'une fonction polynôme du second degré définie par f(x) = ax^2+bx+c avec a ≠ 0 . Il a écrit :

```
def variation(a,b,c) :
    if (1) :
        print("la fonction est (2) puis (3) ")
    else :
        (4)
```

a) Par quoi faut-il remplacer (1), (2), (3) et (4) afin de répondre au problème d'Henri ?

(1) : a > 0

(2) : décroissante

(3) : croissante

(4) print(« la fonction est croissante puis décroissante »)

b) Qu'obtient-on en affichage si on entre dans la console variation(2,3,4)

L'affichage est : « la fonction est décroissante puis croissante »

3) Soit m un réel.

On cherche à déterminer les réels m pour lesquels l'équation (E_m) : $(m-3)x^2+(m+2)x+m+5=0$ soit une équation du second degré qui admette exactement une solution

a) Calculer, en fonction de m, le discriminant de cette équation .

$\Delta = (m+2)^2-4\times(m-3)(m+5)$

$= ... = -3m^2-4m+64$

b) En déduire les valeurs de m qui répondent à la question

$\Delta' = 16--3\times4\times64 = 784 > 0$ deux racines $m_1 = -\frac{16}{3}$ et $m_2 = 4$

c) Déterminer, pour les valeurs de m trouvée précédemment, cette solution unique

pour $m_1 = -\frac{16}{3}$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{16}{3}+2}{2\left(-\frac{16}{3}-3\right)} = \frac{10}{3}\times-\frac{3}{50} = -\frac{1}{5}$

pour $m_2 = 4$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4+2}{2\times(4-3)} = -3$

Exercice 2 **5,5 points**

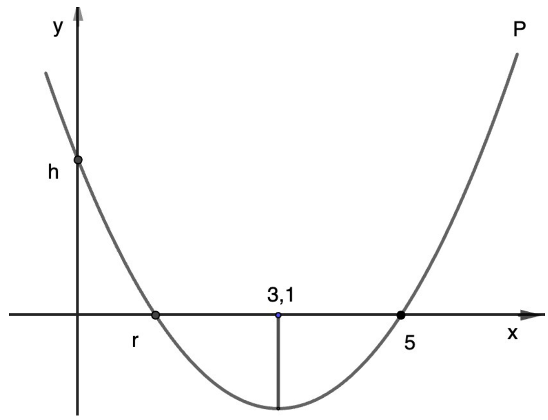
A) Question de cours :

Soit f un polynôme du second degré $f(x) = ax^2+bx+c$.

On sait que f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 . Recopier et compléter : $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\times x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

B) On considère la courbe P suivante tracée dans un repère orthonormé

Cette courbe représente la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2+bx+c$ (où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$)



1) Quelle est la nature de la courbe P ? parabole

2) Est-il exact que a < 0 ? non car la fonction est décroissante puis croissante donc a > 0

3) Donner l'équation réduite de l'axe de symétrie de P.

l'équation est x = 3,1

4) Que vaut la somme des 2 racines de f ?

l'axe de symétrie a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$ donc $-\frac{b}{2a} = 3{,}1$ ce qui donne $-\frac{b}{a} = 6{,}2$ d'où $x_1+x_2 = 6{,}2$

5) En déduire que r = 1,2.

$5+x_2=6{,}2$ ce qui donne $x_2 = 1{,}2$

6) On pose $\Delta = b^2-4ac$. Est-il exact que $\Delta \leq 0$?

non il y a deux racines distinctes donc $\Delta>0$

7) Que vaut le produit des 2 racines de f ?

produit = 1,2×5 = 6

8) On suppose que h = 2,4 . Déterminer la valeur de c

f(0) = c = h = 2,4

9) En déduire les valeurs de a et b

$\frac{c}{a} = \frac{2,4}{a} = 6$ ce qui donne a = $\frac{2,4}{6} = 0,4$

Comme $-\frac{b}{a}=6,2$, on en déduit que b = $-6,2a = -2,48$

Exercice 3 **Les questions de cet exercice sont indépendantes** **6 points**

1) Parmi les nombres ci-dessous, un seul n'admet pas le même point image sur le cercle trigonométrique .
Lequel et pourquoi ?

Sujet 1 $\frac{29\pi}{6}$; $\frac{125\pi}{6}$; $-\frac{31\pi}{6}$; $-\frac{85\pi}{6}$

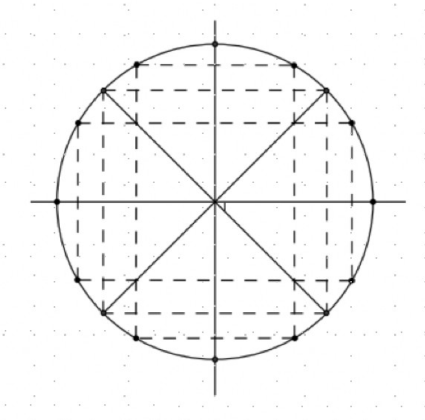
Sujet 2 $\frac{14\pi}{3}$; $\frac{62\pi}{3}$; $-\frac{16\pi}{3}$; $-\frac{41\pi}{3}$

$\frac{29\pi}{6} - 4\pi = \frac{5\pi}{6}$ $\frac{14\pi}{3} - 4\pi = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{125\pi}{6} - 20\pi = \frac{5\pi}{6}$ $\frac{62\pi}{3} - 20\pi = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{31\pi}{6} + 6\pi = \frac{5\pi}{6}$ $-\frac{16\pi}{3} + 6\pi = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{85\pi}{6} + 14\pi = \frac{-\pi}{6}$ $-\frac{41\pi}{3} + 14\pi = \frac{\pi}{3}$



2) Sur le cercle trigonométrique ci-joint, placer soigneusement les points suivants $A(-\frac{4\pi}{3})$; $B(-\frac{13\pi}{2})$; $C(-\frac{5\pi}{6})$

$D(-\frac{21\pi}{4})$; $E(\frac{29\pi}{6})$; $F(317\pi)$

3) Compléter **sur le sujet** :

sujet 1 $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

sujet 2 $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Soit x_1 , x_2 , x_3 trois mesures principales telles que :

Sujet 1 $\begin{cases} \cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x_3 = 0 \\ \sin x_3 < 0 \end{cases}$ Donner les valeurs de x_1 , x_2 et x_3 .

Sujet 2 $\begin{cases} \sin x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x_3 = 0 \\ \cos x_3 < 0 \end{cases}$ Donner les valeurs de x_1 , x_2 et x_3 .

Sujet 1 : $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ $x_2 = -\frac{3\pi}{4}$ $x_3 = -\frac{\pi}{2}$

Sujet 2 : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{4}$ $x_3 = \pi$

6) Démontrer que, pour tout réel x, $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2 = \cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x + \cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x =$
$2\cos^2 x+2\sin^2 x = 2(\cos^2 x+\sin^2 x) = 2\times 1 = 2$

7)

Sujet 1 : Soit x $\in [-\pi;0]$. Déterminer $\sin x$ sachant que $\cos x = \frac{1}{5}$

$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ donc $\sin^2 x=1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{25} = \frac{24}{25}$ d'où $\sin x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$ or x $\in [-\pi;0]$ donc le sinus est négatif d'où $\sin x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$

Sujet 2 : Soit x $\in [-\pi;-\frac{\pi}{2}]$. Déterminer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{1}{5}$

$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ donc $\cos^2 x=1-\sin^2 x = 1-\frac{1}{25} = \frac{24}{25}$ d'où $\cos x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$ or x $\in [-\pi;-\frac{\pi}{2}]$ donc le cosinus est négatif d'où $\cos x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$

__Exercice 4__ **3 points**

On considère la fonction polynôme f définie sur IR par f(x) = $4x^3+4x^2-9x+1$.
On appelle P sa courbe représentative

1) Etude des racines de f(x)

a) Déterminer les réels a , b et c tels que f(x) = $(x-1)(ax^2+bx+c)$
on développe et on identifie ls coefficients
b) Dans cette question, on prendra a = 4 , b = 8 , c = -1
Déterminer les solutions de l'équation f(x) = 0

$x-1 = 0$ ou $4x^2+8x-1 = 0$

$\Delta = 80 > 0$ deux solutions x = $\frac{-8\pm\sqrt{80}}{8} = \frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$

2) Etude d'une autre fonction

On considère la fonction g dont une représentation graphique est la parabole P ′ de sommet $S\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$ passant par $A(0;1)$.

a) Déterminer l'expression de g(x) en fonction de x

On utilise la forme canonique g(x) = $a\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

g(0) = 1 permet d'obtenir a = $a\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}=1$ cad a = $\frac{9}{8}\times\frac{16}{9} = 2$

g(x) = $2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

b) Pour la suite on prendra g(x) = $2x^2-3x+1$

Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de P' avec l'axe des abscisses

Il faut résoudre g(x) = 0 qui donne x = 1 et x = $\frac{1}{2}$

La question suivante est une question facultative , elle ne rentrera dans le barème qu'en bonus

3) Intersection des deux courbes

a) Ecrire comme produit des trois facteurs du premier degré A = $4x^3+2x^2-6x$

A = $2x(2x^2+x-3)$ = $2x\times 3(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ = $6x(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

b) Résoudre alors l'inéquation A ≥ 0

On dresse un tableau de signe

c) En déduire la position relative des paraboles P et P'

Il faut étudier le signe de f(x) - g(x) = $4x^3+4x^2-9x+1$ - $2x^2-3x+1$ = $4x^3+2x^2-6x$ = A(x)

on conclut alors à l'aide de la question précédente