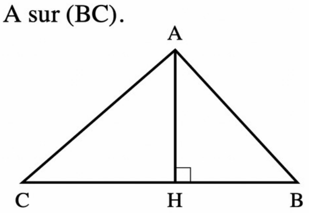
DS produit scalaire 1C

Exercice 1

1) Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
On donne les longueurs : AB = 6,
BH = 4 et HC = 5.
Calculer les produits scalaires suivants en se justifiant

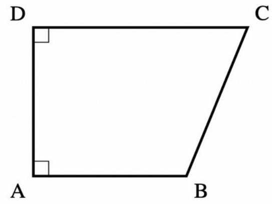
a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



2) ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que AB = AD = 5 et DC = 7.
Calculer les produits scalaires suivants en se justifiant :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$



1)a) $\overrightarrow{BH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BA}$ sur la direction de $\overrightarrow{BC}$ donc

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires de même sens, on a :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 4 \times 9 = 36$

b) $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AH}$ donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = AH \times AH$

Dans le triangle rectangle ABH, le th de Pythagore donne AH = $\sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$

on a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 20$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraire donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -35$

c) Par projection , $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}^2 = 49$

Exercice 2

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Dans un repère orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB} = (5\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-4\,;\,7)$.
Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ vaut :

a) -27 b) -13 c) 13 d) 27

2) Dans un repère orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB} = (4\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AC} = (3\,;\,-1)$.
L'angle géométrique $\widehat{BAC}$ vaut au dégré près :

a) 55° b) 60° c) 45° d) 50°

1)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = xx'+yy' = 5 \times 4 + 1 \times (-7) = 20 - 7 = 13$$

réponse C

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + 3 \times (-1) = 9$

AB = $\sqrt{4^2+3^2} = 5$

AC = $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5\sqrt{10}\cos(\widehat{BAC}) = 9$

d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{9}{5\sqrt{10}}$ $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{9}{5\sqrt{10}}\right) \approx 55°$

Réponse a)

Exercice 3

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$.
Soit un point M sur le segment [CD] tel que $CM = 4$.

1) Faire une figure.

2) Développer et calculer $(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})$.

3) En déduire la nature du triangle ABM

2) $$\begin{aligned}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}) &= \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= -MD\times MC+0+0+DA\times CB \\ &= -1\times4+2\times2 = 0\end{aligned}$$

3) D’aprés Chasles, $(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et le triangle MAB est rectangle en M