DM corrige

Exercice 1

Soit n $\in \mathbb{N}$. On souhaite calculer la somme des n premiers entiers naturels S = $1+2+3+\ldots+n$

Soit P un polynôme du second degré tel que, pour tout réel x, P(x) = ax^2+bx+c où a , b et c sont des réels avec a $\neq$ 0 .

a) Pour tout réel x, exprimer $\mathrm{P}(x+1)-\mathrm{P}(x)$ en fonction de a , b et x

$\mathrm{P}(x+1)-\mathrm{P}(x)$ = $a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$ = ... = $2ax+a+b$

b) Déterminer les réels a et b tels que $\mathrm{P}(x+1)-\mathrm{P}(x)=x$

On a donc $2ax+a+b=x$ par identification il vient $\begin{cases} 2a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc P(x) = $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$

c) En écrivant alors les entiers de 1 à n à l'aide de la question précédente, démontrer que

S = $\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(1)$

1 = $\mathrm{P}(1+1)-\mathrm{P}(1)$

2 = $\mathrm{P}(2+1)-\mathrm{P}(2)$

3 = $\mathrm{P}(3+1)-\mathrm{P}(3)$

.....

n = $\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(n)$

En additionnant toutes ces égalités , on obtient S à gauche et à droite tout s'élimoine sauf P(n+1) et P(1) d'où la réponse

d) En déduire l'expression de S en fonction de n

D'après la question précédente, S = $\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(1)$ = $\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)+c-\left(\frac{1}{2}\times1^2-\frac{1}{2}\times1+c\right)$

$$= \ldots = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

En utilisant un changement de variables, résoudre les équations suivantes :

1) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{5x}{2x-2}+1=0$ Valeur interdite x = 1

On pose X = $\frac{x}{x-1}$ d'où l'équation est $\mathrm{X}^2-\frac{5}{2}\mathrm{X}+1=0$ Δ = $\frac{9}{4}$ deux racines

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ou } \mathrm{X}_2 = \frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 2$$

d'où $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{x-1}=2$

$2x = x-1$ x = $2x-2$

x = -1 $\neq$ 1 x = 2 $\neq$ 1

2) $(x^2-x-1)^2-3x^2+3x-1=0$

On pose X = x^2-x-1 on a alors x^2-x = X+1

$(x^2-x-1)^2-3(x^2-x)-1=0$

$X^2-3(X+1)-1=0$

$X^2-3X-4=0$

Δ = 25 ...

X_1 = -1 ou X_2 = 4

d'où $x^2-x-1=-1$ $x^2-x-1=4$

$x^2-x=0$ $x^2-x-5=0$

$x(x-1)=0$ Δ = 21

x = 0 ou x = 1 x = $\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

<u>**Exercice 3**</u>

1) Sachant que $\cos(a+b)$ = $\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$, montrer que

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ et en déduire que $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$

ob prend a = b = x , la relation devient :

$\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x$ = $\cos^2 x-\sin^2 x$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ donc $\cos(2x)=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$ = $2\cos^2 x-1$

d'où de $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$ on sort $\cos^2 x$ pour trouver $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$

2) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ or $\frac{\pi}{8} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc son cosinus est positif d'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$