

DM 3

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer la somme des n premiers entiers naturels $S = 1+2+3+\dots+n$

Soit P un polynôme du second degré tel que, pour tout réel x , $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

- Pour tout réel x , exprimer $P(x+1) - P(x)$ en fonction de a , b et x
- Déterminer les réels a et b tels que $P(x+1) - P(x) = x$
- En écrivant alors les entiers de 1 à n à l'aide de la question précédente, démontrer que
$$S = P(n+1) - P(1)$$
- En déduire l'expression de S en fonction de n

Exercice 2

En utilisant un changement de variables, résoudre les équations suivantes :

$$1) \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{5x}{2x-2} + 1 = 0 \qquad 2) (x^2 - x - 1)^2 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Exercice 3

1) Sachant que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, montrer que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ et en déduire que } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$