

### DM 3

#### Exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite calculer la somme des  $n$  premiers entiers naturels  $S = 1+2+3+\dots+n$

Soit  $P$  un polynôme du second degré tel que, pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ .

- Pour tout réel  $x$ , exprimer  $P(x+1) - P(x)$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $x$
- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(x+1) - P(x) = x$
- En écrivant alors les entiers de 1 à  $n$  à l'aide de la question précédente, démontrer que  
$$S = P(n+1) - P(1)$$
- En déduire l'expression de  $S$  en fonction de  $n$

#### Exercice 2

En utilisant un changement de variables, résoudre les équations suivantes :

1)  $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{5x}{2x-2} + 1 = 0$                       2)  $(x^2 - x - 1)^2 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

#### Exercice 3

1) Sachant que  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ , montrer que

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$  et en déduire que  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

2) En déduire la valeur exacte de  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et en déduire la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$