Devoir première B

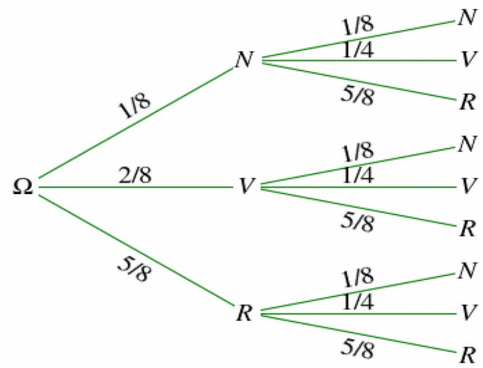
Variable aléatoire

Jeudi 7 avril 2022

__Exercice 1 :__

Une urne contient une boule noire, deux boules vertes et 5 boules rouges .
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne et on note à chaque tirage la couleur de la boule tirée.

1)Reproduire et compléter l'arbre pondérée ci-contre :



2) a) On note A l'événement « les deux boules sont de la même couleur » .

Montrer que P(A) = $\frac{15}{32}$

on peut avoir N N ou V V ou R R on ajoute donc les prob :

P(A) = P(NN)+P(VV)+P(RR) = $\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8} = \frac{1}{64}+\frac{1}{16}+\frac{25}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

b) On note B l'événement « les deux boules tirées ne sont pas de la même couleur » .

Montrer que P(B) = $\frac{17}{32}$

B est l'événement contraire de A donc $P(B)=1-P(A)=1-\frac{15}{32}=\frac{17}{32}$

3) On considère le jeu suivant :

- Le joueur mise 10 euros.
- Le joueur tire alors successivement et avec remise deux boules de l'urne :
  - si les deux boules sont de la même couleur, le joueur perd sa mise
  - si les deux boules sont de couleurs différentes, le joueur gagne 28 €.

On appelle X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

x_i	-10	18
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{32}$	$\frac{17}{32}$

b) Calculer l'espérance. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier

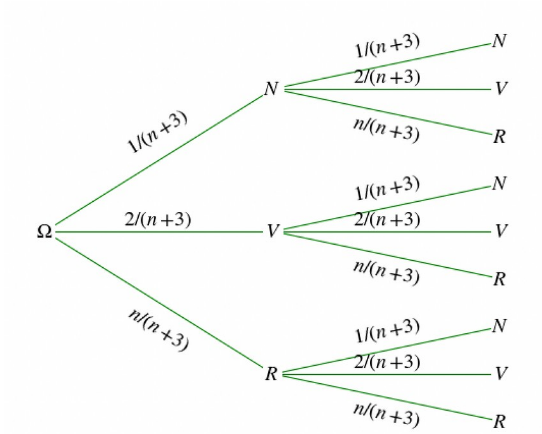
E(X) = $-10\times\frac{15}{32}+18\times\frac{17}{32} = \frac{156}{32}$ = 4,875

Le jeu est donc à l'avantage du joueur qui gagnera 4,875 euros en moyenne par partie

4) L'organisateur veut rendre ce jeu équitable . Il décide de remplacer les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier naturel . On va donc chercher s'il existe une valeur de n pour laquelle ce jeu est équitable .

a) En justifiant correctement la réponse (toute trace de recherche sera valorisée), démontrer que l'espérance de X est donnée par : E(X) = $\frac{-10n^2+108n+22}{(n+3)^2}$

L'arbre devient :



On a alors P(A) = $\frac{1}{(n+3)^2}+\frac{4}{(n+3)^2}+\frac{n^2}{(n+3)^2} = \frac{n^2+5}{(n+3)^2}$

P(B) = 1 – P(A) = $1-\frac{n^2+5}{(n+3)^2} = \frac{n^2+6n+9}{(n+3)^2}-\frac{n^2+5}{(n+3)^2} = \frac{6n+4}{(n+3)^2}$

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-10	18
$P(X=x_i)$	$\frac{n^2+5}{(n+3)^2}$	$\frac{6n+4}{(n+3)^2}$

L'espérance est alors : E(X)= $-10\times\frac{n^2+5}{(n+3)^2}+18\times\frac{6n+4}{(n+3)^2} = \frac{-10n^2+108n+22}{(n+3)^2}$

b) Conclure .

Le jeu doit être équitable donc E(X) = 0 ce qui revient à $-10n^2+108n+22=0$

Le discriminant vaut 12544 = 112^2 et on trouve alors n = 11 ou n = $-\frac{1}{5}$

Le jeu sera donc équitable pour 11 boules rouges

Exercice 2 :

Un trader a analysé plusieurs scénarios quand à l'évolution de deux actions notées A et B .
On note X la variable aléatoire donnant l'évolution en euros de l'action A et Y celle donnant en euros l'évolution de l'action B . Voici les lois de probabilités de X et de Y .

Valeur de X	-50	0	10	40
Probabilité	0,1	0,3	0,5	0,1

Valeur de Y	-30	10	30
Probabilité	0,3	0,4	0,3

1) Calculer E(X) et E(Y) . Interpréter

E(X) = ... = 4 E(Y) = ... = 4

2) Calculer l'écart type de X et de Y

V(X) = $0{,}1\times(-50)^2+0+0{,}5\times10^2+0{,}1\times40^2 \quad -4^2$ = 444 donc sigma(X) = $\sqrt{444}$ ≈ 21,07

V(Y) = $0{,}3\times(-30)^2+0{,}4\times10^2+0{,}3\times30^2 \quad -4^2$ = 564 donc sigma(Y) = $\sqrt{564}$ ≈ 23,7

3) Le trader ne souhaite pas prendre trop de risques et décide d'investir sur l'action la moins volatile.
Quelle action lui conseillez-vous ?

L'écart type pour X étant inférieur à celui pour Y, on peut estimer que c'est l'action X qui s'écarte le moins de sa moyenne