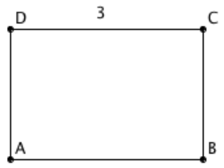
Exercice 1 : Le produit scalaire les parties A et B sont indépendantes

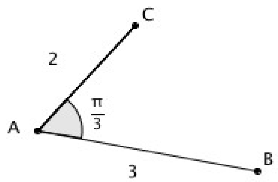
Partie A

1) Calculer dans chaque cas $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

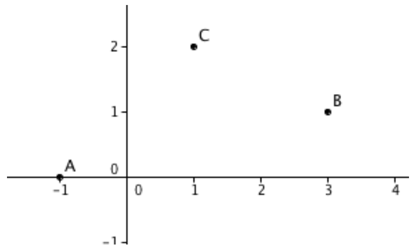
cas 1



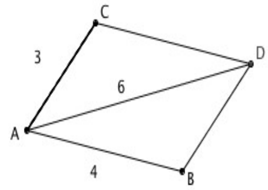
cas 2



cas 3



cas 4



cas 1 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=9$ cas 2 : facile $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ cas 3 : coordonnées : $\overrightarrow{AB}(4;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;2)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8+2=10$ cas 4 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(6^2-4^2-3^2) = \frac{11}{2}$

2) On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

Calculer :

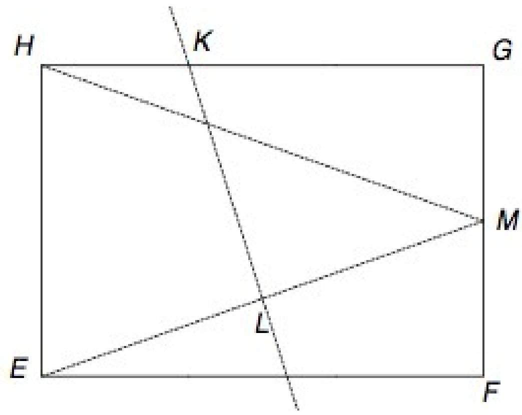
a) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ b) $(\vec{u}+2\vec{v})^2$ c) $\|\ 2\vec{u} - \vec{v}\ \|$

$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 2\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2 = 8-2+1-9 = -2$

$(\vec{u}+2\vec{v})^2 = \vec{u}^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2 = 4+4+4\times9 = 44$

$\|\ 2\vec{u}-\vec{v}\ \| = \sqrt{4\vec{u}^2-4\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2} = \sqrt{16-4+9} = \sqrt{21}$

Partie B



EFGH est un rectangle, avec EH = 4 et EF = 6;

M est le milieu de [FG] et K est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$.

On appelle L le projeté orthogonal de K sur (EM)

1) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{KE}$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EF} = 36$

$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{HE} = -\overrightarrow{EH}^2 = -16$

2) En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM} = 20$

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HK})\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM}) = \overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{FM} = 0+EH\times FM+HK\times EF+0$
$= 4\times2+2\times6 = 20$

3) a) On utilise le th de Pythagore : $EM=\sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

b) En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM}$, en déduire la distance EL

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EL}\cdot\overrightarrow{EM}$ = EL$\times$EM = 20 donc EL$=\dfrac{20}{2\sqrt{10}}$ = $\dfrac{10}{\sqrt{10}}$ = $\sqrt{10}$.

4) Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{KEM}$.

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM}$ = EK$\times$EM$\times$cos ($\widehat{KEM}$) = 20 donc cos($\widehat{KEM}$) = $\dfrac{20}{\sqrt{20}\sqrt{40}}$ = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\widehat{KEM}$ = 45°