DS première B Spécialité Mathématiques
Lundi 11 octobre 2021

Exercice 1 (5 points) :

PARTIE A

Répondre, sur le sujet, par vrai ou faux: **on ne demande pas de justification** . A remettre dans la copie

	REPONSES
Question 1 : $g(x)=9(x-1)^2-(3x+1)^2$ est un trinôme du second degré	FAUX
Question 2: La courbe d'équation $y=-2x^2+x-3$ est située en dessous de l'axe des abscisses	VRAI
Question 3: La courbe d'équation y = $-4x^2+3x-1$ a pour sommet le point S ($\frac{3}{8};-\frac{7}{16}$)	VRAI
Question 4: Le trinôme $5(2x-1)^2$ a un discriminant nul	VRAI
Question 5 : L'équation $15105x^2+17898x-20005=0$ a deux solutions distinctes	VRAI
Question 6 : Un trinôme qui a pour discriminant -5 est strictement négatif	FAUX

PARTIE B : Répondre par vrai ou faux à l'affirmation suivante en justifiant votre réponse

Affirmation : On considère les fonctions f et g définies par f(x) = x^2+5x-4 et $g(x)=-2x+2$

La courbe de f est au dessus de la courbe de g sur l'intervalle [1;2]

Il faut étudier le signe de $f(x)-g(x)=x^2+5x-4+2x-2$ = x^2+7x-6

$\Delta=49+24=73$ >0 donc deux racines

$x_1=\frac{-7+\sqrt{73}}{2}$ ≈ 0,46 ou $x_2=\frac{-7-\sqrt{63}}{2}$ ≈ -7,4

le trinôme est donc du signe de a sauf entre ses racines donc pour x > x_1 , $f(x)-g(x)$ est positif et Cf est au dessus de Cg donc vrai car on est sur [1;2]

Exercice 2 (5 points) :

1) Résoudre l'inéquation suivante : $2(x+1)^2+5x>7$

$$2x^2+4x+2+5x-7>0$$

$$2x^2+9x-5>0$$

$\Delta=81+40=121>0$ donc deux racines $x_1=\frac{-9-11}{4}$ = -5 ou $x_2=\frac{-9+11}{4}$ = $\frac{1}{2}$

Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines donc positif sur]-∞;-5[∪]1/2;+∞[

2) a) Déterminer, selon les valeurs de x, le signe des deux trinômes suivants :

$$P(x) = -3x^2+4x+4 \quad \text{et} \quad Q(x) = 5x^2+x-6$$

Pour $P : \Delta = 16+48=64>0$ deux racines $x_1=2$ ou $-\frac{2}{3}$

Pour $Q : \Delta=121>0$ donc deux racines : $x_3=1$ ou $x_4=\frac{-6}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		+
$signe\,de\;P(x)$		−	0	+	0	−	

x	$-\infty$		$\frac{-6}{5}$		1		$+\infty$
$S\,igne\,de\;Q(x)$		+	0	−	0	+	

b) Résoudre alors l'inéquation $\dfrac{-3x^2+4x+4}{5x^2+x-6} \geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{-6}{5}$		$\frac{-2}{3}$		1		2		$+\infty$
$signe\,de\;P(x)$		−	⋮	−	0	+	⋮	+	0	−	
Signe de Q(x)		+	0	_	⋮	−	0	+	⋮	+	
Signe du quotient		−	Val int	+	0	−	Val int	+	0	−	

$$S = \left]\frac{-6}{5};-\frac{2}{3}\right] \cup \;]1;2]$$

3) Résoudre l'équation bicarrée suivante : $3x^4+15x^2-108=0$

On pose $X=x^2$, l'équation devient

$\Delta=15^2-4\cdot3\cdot(-108)=1521=39^2$ donc deux racines : $X_1=\frac{-15-39}{6}=-9$ ou $X_2=\frac{-15+39}{6}=4$

$x^2=-9$ ou $x^2=4$

impossible un carré n'est pas négatif

$x=\pm2$

$S = \{\pm2\}$

4) On note ϕ le nombre $\phi = 2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}}$ (les pointillés signifient que le processus ne s'arrête pas)

a) Exprimer $\phi - 2$ en fonction de ϕ .

$$\phi - 2 = \frac{2}{\phi}$$

b) En déduire une équation du second degré vérifiée par ϕ et la résoudre afin d'obtenir une valeur de ϕ plus simple

Comme $\phi \neq 0$, l'équation devient $(\phi-2)\cdot\phi=2$ c'est à dire $\phi^2-2\phi-2=0$

$\Delta=4+8=12$ donc deux racines $\phi1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3}$ ou $\phi2 = 2+\frac{\sqrt{12}}{2}=1+\sqrt{3}$

or ϕ est un nombre positif donc $\phi = 1+\sqrt{3}$

Exercice 3 : Equation paramétrique (4 points)

Soit l'équation (E) définie sur $\mathbb{R}$ par : $mx^2-(2m+3)x+m+2=0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1) Si m = 0 , que peut-on dire de l'équation (E) ? Résoudre alors l'équation (E) .

L'équation (E) devient : $-3x+2=0$ de solution $x=\frac{2}{3}$

2) On se place dans le cas où $m \neq 0$

a) Démontrer que le discriminant de cette équation est $\Delta=4m+9$

$\Delta=(-(2m+3))^2-4\cdot m\cdot(m+2) = 4m^2+12m+9-4m^2-8m = 4m+9$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) possède deux solutions.

Deux solutions pour un delta positif cad $4m+9>0$ c'est à dire $m>\frac{-9}{4}$

3) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles l'inéquation $mx^2-(2m+3)x+m+2>0$ soit vérifié pour tout réel x?

On veut le polynôme positif pour tout réel x donc pour cela il faut un delta strictement négatif pour que le trinôme soit du signe de a or ce delta est strict négatif pour m < $\frac{-9}{4}$ mais dans ce cas a = m < 0 donc le trinôme est strict négatif donc aucune valeur de m possible

Exercice 4 (6 points) :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $3x^2-4x-4$ et g(x) = $-3x^2+6x+12$

On note C_f et C_g les représentations graphiques de ces deux fonctions dans un repère orthogonal.

1) Une des deux courbes est donnée dans le repère en annexe. Laquelle ? Justifier .

La parabole donnée a ses branches tournées vers le haut ce qui correspond à a > 0 donc il s'agit de C_f

2) a) f(x) = $3x^2-4x-4$ $\Delta=16+48=64$ > 0 donc deux racines $x_1=-\frac{2}{3}$ et $x_2=2$ d'où

$f(x)=3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

b) g(x) = $-3(x^2-2x-4)$ = $-3((x-1)^2-1-4)$ = $-3(x-1)^2+15$

3) Dresser le tableau de variation de g puis tracer Cg dans le même repère que C_f

a= -3 donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas donc g est croissante puis décroissante. De plus, d'après la forme canonique, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(1;15)$ d'où :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↗	15	↘

4) a) Déterminer les racines de f D'après 2 a les racines de f sont $-\frac{2}{3}$ et 2

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses

Il faut résoudre g(x) = 0 donc $-3x^2+6x+12$ = 0 Δ = 36+144=180 > 0 donc deux racines

$x_1=\frac{-6-\sqrt{180}}{-6}$ ou $x_2=\frac{-6+\sqrt{180}}{-6}$

$x_1=1+\sqrt{5}$ ou $x_2=1-\sqrt{5}$ donc les coordonnées sont $(1+\sqrt{5};0)$ et $(1-\sqrt{5};0)$

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g

Il faut résoudre $f(x)=g(x)$ donc $3x^2-4x-4=-3x^2+6x+12$ ie $6x^2-10x-16=0$

$\Delta=100+384=484=22^2$ >0 donc deux racines $x_1=\frac{10-22}{12}$ $=-1$ ou $x_2=\frac{10+22}{12}$ $=$ $\frac{8}{3}$

$f(-1)=3+4-4=3$ et f(8/3)=