

DS première B Spécialité Mathématiques

Lundi 11 octobre 2021

Exercice 1 (5 points) :

PARTIE A

Répondre, sur le sujet, par vrai ou faux: **on ne demande pas de justification** . A remettre dans la copie

	REPONSES
Question 1 : $g(x)=9(x-1)^2-(3x+1)^2$ est un trinôme du second degré	FAUX
Question 2: La courbe d'équation $y=-2x^2+x-3$ est située en dessous de l'axe des abscisses	VRAI
Question 3: La courbe d'équation $y = -4x^2 + 3x - 1$ a pour sommet le point S ($\frac{3}{8}; -\frac{7}{16}$)	VRAI
Question 4: Le trinôme $5(2x-1)^2$ a un discriminant nul	VRAI
Question 5 : L'équation $15105x^2 + 17898x - 20005 = 0$ a deux solutions distinctes	VRAI
Question 6 : Un trinôme qui a pour discriminant -5 est strictement négatif	FAUX

PARTIE B : Répondre par vrai ou faux à l'affirmation suivante en justifiant votre réponse

Affirmation : On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 5x - 4$ et $g(x) = -2x + 2$

La courbe de f est au dessus de la courbe de g sur l'intervalle [1;2]

Il faut étudier le signe de $f(x) - g(x) = x^2 + 5x - 4 + 2x - 2 = x^2 + 7x - 6$

$\Delta = 49 + 24 = 73 > 0$ donc deux racines

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2} \approx 0,46 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{73}}{2} \approx -7,4$$

le trinôme est donc du signe de a sauf entre ses racines donc pour $x > x_1$, $f(x) - g(x)$ est positif et Cf est au dessus de Cg donc vrai car on est sur [1;2]

Exercice 2 (5 points) :

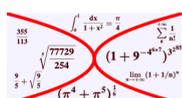
1) Résoudre l'inéquation suivante : $2(x+1)^2 + 5x > 7$

$$2x^2 + 4x + 2 + 5x - 7 > 0$$

$$2x^2 + 9x - 5 > 0$$

$$\Delta = 81 + 40 = 121 > 0 \quad \text{donc deux racines} \quad x_1 = \frac{-9-11}{4} = -5 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$$

Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines donc positif sur $]-\infty; -5[\cup]1/2; +\infty[$



2) a) Déterminer, selon les valeurs de x, le signe des deux trinômes suivants :

$$P(x) = -3x^2 + 4x + 4 \quad \text{et} \quad Q(x) = 5x^2 + x - 6$$

Pour P: $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$ deux racines $x_1 = 2$ ou $-\frac{2}{3}$

Pour Q: $\Delta = 121 > 0$ donc deux racines : $x_3 = 1$ ou $x_4 = -\frac{6}{5}$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+$	
<i>signe de P(x)</i>	-	0	+	0	-

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	1	$+\infty$	
<i>Signe de Q(x)</i>	+	0	-	0	+

b) Résoudre alors l'inéquation $\frac{-3x^2 + 4x + 4}{5x^2 + x - 6} \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$			
<i>signe de P(x)</i>	-	:	-	0	+	:	+	0	-
Signe de Q(x)	+	0	-	:	-	0	+	:	+
Signe du quotient	-	Val int	+	0	-	Val int	+	0	-

$$S = \left] -\frac{6}{5}; -\frac{2}{3} \right] \cup]1; 2]$$

3) Résoudre l'équation bicarrée suivante : $3x^4 + 15x^2 - 108 = 0$

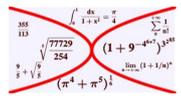
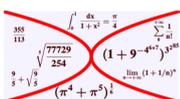
On pose $X = x^2$, l'équation devient

$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-108) = 1521 = 39^2 \quad \text{donc deux racines : } X_1 = \frac{-15 - 39}{6} = -9 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{-15 + 39}{6} = 4$$

$$x^2 = -9 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4$$

impossible un carré n'est pas négatif

$$S = \{\pm 2\}$$



4) On note ϕ le nombre $\phi = 2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\dots}}}$ (les pointillés signifient que le processus ne s'arrête pas)

a) Exprimer $\phi - 2$ en fonction de ϕ .

$$\phi - 2 = \frac{2}{\phi}$$

b) En déduire une équation du second degré vérifiée par ϕ et la résoudre afin d'obtenir une valeur de ϕ plus simple

Comme $\phi \neq 0$, l'équation devient $(\phi - 2) \cdot \phi = 2$ c'est à dire $\phi^2 - 2\phi - 2 = 0$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \text{ donc deux racines } \phi_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3} \text{ ou } \phi_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

or ϕ est un nombre positif donc $\phi = 1 + \sqrt{3}$

Exercice 3 : Equation paramétrique (4 points)

Soit l'équation (E) définie sur \mathbb{R} par : $mx^2 - (2m+3)x + m + 2 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1) Si $m = 0$, que peut-on dire de l'équation (E) ? Résoudre alors l'équation (E).

L'équation (E) devient : $-3x + 2 = 0$ de solution $x = \frac{2}{3}$

2) On se place dans le cas où $m \neq 0$

a) Démontrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = 4m + 9$

$$\Delta = (-(2m+3))^2 - 4 \cdot m \cdot (m+2) = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 8m = 4m + 9$$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) possède deux solutions.

Deux solutions pour un delta positif cad $4m + 9 > 0$ c'est à dire $m > -\frac{9}{4}$

3) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles l'inéquation $mx^2 - (2m+3)x + m + 2 > 0$ soit vérifié pour tout réel x ?

On veut le polynôme positif pour tout réel x donc pour cela il faut un delta strictement négatif pour que le trinôme soit du signe de a or ce delta est strict négatif pour $m < -\frac{9}{4}$ mais dans ce cas $a = m < 0$ donc le trinôme est strict négatif donc aucune valeur de m possible

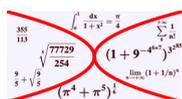
Exercice 4 (6 points) :

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ et $g(x) = -3x^2 + 6x + 12$

On note C_f et C_g les représentations graphiques de ces deux fonctions dans un repère orthogonal.

1) Une des deux courbes est donnée dans le repère en annexe. Laquelle ? Justifier .

La parabole donnée a ses branches tournées vers le haut ce qui correspond à $a > 0$ donc il s'agit de C_f



2) a) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$ donc deux racines $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = 2$ d'où

$$f(x) = 3(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

b) $g(x) = -3(x^2 - 2x - 4) = -3((x-1)^2 - 1 - 4) = -3(x-1)^2 + 15$

3) Dresser le tableau de variation de g puis tracer C_g dans le même repère que C_f

$a = -3$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas donc g est croissante puis décroissante. De plus, d'après la forme canonique, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(1; 15)$ d'où :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

4) a) Déterminer les racines de f D'après 2 a les racines de f sont $-\frac{2}{3}$ et 2

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses

Il faut résoudre $g(x) = 0$ donc $-3x^2 + 6x + 12 = 0$ $\Delta = 36 + 144 = 180 > 0$ donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{180}}{-6} \text{ ou } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{180}}{-6}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{5} \text{ ou } x_2 = 1 - \sqrt{5} \text{ donc les coordonnées sont } (1 + \sqrt{5}; 0) \text{ et } (1 - \sqrt{5}; 0)$$

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g

Il faut résoudre $f(x) = g(x)$ donc $3x^2 - 4x - 4 = -3x^2 + 6x + 12$ ie $6x^2 - 10x - 16 = 0$

$$\Delta = 100 + 384 = 484 = 22^2 > 0 \text{ donc deux racines } x_1 = \frac{10 - 22}{12} = -1 \text{ ou } x_2 = \frac{10 + 22}{12} = \frac{8}{3}$$

$$f(-1) = 3 + 4 - 4 = 3 \text{ et } f(8/3) =$$

