DM Première B

Exercice 1:

Jean a construit une succession d'octaèdres pleins avec des briques de constructions carrées. Voici ses premières constructions :

Sa première construction est constituée d'une seule brique, la seconde de 6 et la troisième de 19.

a) Combien y a-t-il de briques carrées dans sa quatrième construction ?

On en a 16 pour l'étage du « milieu » puis au dessus et en dessous on en a : 9 + 4 + 1 donc au total il y en a $16+2\times(9+4+1)$ = 44

b) On note B_n le nombre de briques carrées nécessaires à la construction du $n^{ième}$ octaèdre où n désigne un nombre entier naturel non nul .

Justifier que $B_n = 2\times(1+2^2+\ldots+n^2)-n^2$

L'étage « du milieu » est composée de n briques sur son côté puis en remontant on en a $n-1$ puis $n-2$ ... jusqu'à 1 donc du milieu au haut , on a : $1+2^2+3^2+\ldots+n^2$ briques.

De même si on part du milieu vers le bas, on a $1+2^2+3^2+\ldots+n^2$ briques.

Comme on compte ainsi deux fois l'étage du milieu, on a donc $B_n = 2\times(1+2^2+\ldots+n^2)-n^2$

c) On admet que pour tout entier naturel n, $1+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En déduire que $B_n = \dfrac{2n^3+n}{3}$

$$B_n = 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)-3n^2}{3} = \ldots = \frac{2n^3+n}{3}$$

d) Combien de briques le $10^{ème}$ octaèdre compte-t-il ?

$$B_{10} = \frac{2\times10^3+10}{3} = \frac{2010}{3} = 670$$

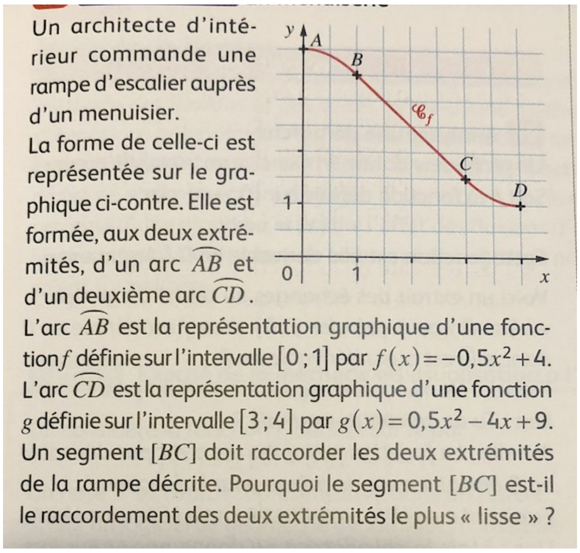
e) Quel est le plus grand octaèdre que l'on peut construire avec 2000 briques carrées ?

Un tableau de valeur de la suite donne

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	Bn	0	1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	891	1156	1469	1834	2255	2736	3281
3																			

On peut donc donner comme valeur 14 pour le plus grand octaèdre

Exercice 2 :


Un architecte d'intérieur commande une rampe d'escalier auprès d'un menuisier.
La forme de celle-ci est représentée sur le graphique ci-contre. Elle est formée, aux deux extrémités, d'un arc $\widehat{AB}$ et d'un deuxième arc $\widehat{CD}$.
L'arc $\widehat{AB}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=-0,5x^2+4$.
L'arc $\widehat{CD}$ est la représentation graphique d'une fonction g définie sur l'intervalle $[3\,;4]$ par $g(x)=0,5x^2-4x+9$.
Un segment $[BC]$ doit raccorder les deux extrémités de la rampe décrite. Pourquoi le segment $[BC]$ est-il le raccordement des deux extrémités le plus « lisse » ?

Le raccordement pourra être qualifié de lisse si la tangente en B à la fonction f et la tangente en C à la fonction g est la droite (BC). Il faut donc déterminer l'équation de ces deux tangentes :

- f(x) = $-0,5x^2+4$
  f est un polynôme dérivable sur ℝ .
  $f'(x)=-x$
  tangente en B à C_f :
  y = $f'(1)(x-1)+f(1)$
  y = $-1(x-1)+3,5$
  y = $-x+4,5$
- g(x) = $0,5x^2-4x+9$
  g est un polynôme donc dérivable sur ℝ .
  $g'(x)=x-4$
  Tangente en C à C_g :
  y = $g'(3)(x-3)+g(3)$
  y = $-1(x-3)+1,5$
  y = $-x+4,5$
- Les deux tangentes sont donc confondues donc le raccordement est le plus lisse possible