DM 6

Exercice 1: On considère la fonction f définie sur ℝ par : f(x) = $(3x^2-4x+1)^2$ et on note C_f sa courbe représentative

1) Conjecturer avec votre calculatrice le nombre de points de C_f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe semble admettre une tangente parallèle à l'axe des abscisses

2) a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1

Pour dériver f il faut commencer par développer f :

f(x) = $9x^4+16x^2+1-24x^3+6x^2-8x$ = $9x^4-24x^3+22x^2-8x+1$

d'où f est un polynôme dérivable sur ℝ et on a :

$$f'(x)=36x^3-72x^2+44x-8$$

L'équation de la tangente en 1 est : y = $f'(1)(x-1)+f(1)$ et on a $f'(1)=36-72+44-8=0$ et f(1)=0 donc l'équation est y = 0

b) Déterminer les réel a , b et c tel que $f'(x)$ = $(4x-4)(ax^2+bx+c)$

On développe l'expression

$$\begin{aligned}(4x-4)(ax^2+bx+c) &= 4ax^3+4bx^2+4cx-4ax^2-4bx-4c\\ &= 4ax^3+(4b-4a)x^2+(4c-4b)x-4c\\ &= 36x^3-72x^2+44x-8\end{aligned}$$

Par identification, il vient : $\begin{cases}4a=36\\4b-4a=-72\\4c-4b=44\\-4c=-8\end{cases}$ $\begin{cases}a=9\\b=-9\\c=2\end{cases}$

$$f'(x)=(4x-4)(9x^2-9x+2)$$

c) Déterminer alors les abscisses des points de C_f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses .

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur égal à 0 donc il faut résoudre l'équation $f'(x)=0$

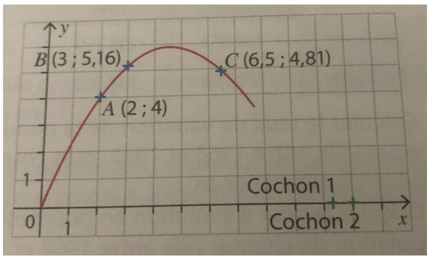
$f'(x)=(4x-4)(9x^2-9x+2)$ = 0

EPN

$4x-4$ = 0 ou $9x^2-9x+2=0$

x = 1 ou $\Delta=9$ .... x_1 = $\frac{6}{18}$ = $\frac{1}{3}$ ou x_2 = $\frac{12}{18}$ = $\frac{2}{3}$

Exercice 2: Les oiseaux en colère



Dans un jeu sur smartphone, le joueur utilise un lance pierre pour lancer des oiseaux sur des cochons verts. Chaque oiseau suit une trajectoire parabolique et a le pouvoir d'accélérer en ligne droite (tangente à la parabole) dès que le joueur tape sur l'écran.
Deux cochons sont situés dans un jardin et ont pour coordonnées (10,29;0) et (10,95;0)

a) Déterminer une équation de la parabole représentée ci-dessus.

f(x) = ax^2+bx+c

On sait que $f(0)$ = 0 donc c = 0 et f(x) = ax^2+bx

D'après la figure, on a f(2)=4 cad $4a+2b=4$ et f(3) = 5,16 d'où $9a+3b=5,16$

Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} 2a+b=2 \\ 3a+b=1,72 \end{cases}$ par soustraction, il vient :

$3a+b-(2a+b)=1,72-2$ ce qui donne a = $-0,28$ d'où b = $2-2a$ = $2+0,56$ = 2,56

f(x) = $-0,28x^2+2,56x$

b) L'oiseau lancé sur l'écran ci-dessus atteindra-t-il un des deux cochons lorsque le joueur appuie sur l'écran au niveau du point C ?

$f'(x)=-0,56x+2,56$

Equation de la tangente en 6,5 à la courbe : y = $f'(6,5)(x-6,5)+f(6,5)$

$f'(6,5)$ = $-1,08$ et $f(6,5)$ = 4,81

L'équation est donc : y = $-1,08(x-6,5)+4,81$

y = $-1,08x+7,02+4,81$

y = $-1,08x+11,83$

Donc quand on appuie sur l'écran au point C , l'oiseau suit une droite D d'équation y = $-1,08x+11,83$

Où cette droite coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Pour cela on a y = 0 d'où $-1,08x+11,83=0$

qui donne x = $\frac{11,83}{1,08}$ ≈ 10,9537

On donc penser que le cochon 2 est atteint par l'oiseau