DM 4 1ère B Spécialité Mathématiques

Exercice 1 :

Partie A

1) Développer $(2+2\sqrt{2})^2 \;=\; 4+8\sqrt{2}+8 \;=\; 12+8\sqrt{2}$

2) Soit f la fonction définie sur $[-\pi;+\pi]$ par $f(x)=4\cos^2(x)+2(\sqrt{2}-1)\cos(x)-\sqrt{2}$

Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x)=0$

a) On pose X = cos(x) . Justifier que $-1\leq X\leq 1$

Pour tout x, $-1\leq\cos(x)\leq 1$

b) Résoudre sur $[-1;1]$ l'équation du second degré obtenue en effectuant ce changement de variables. On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues

$$4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2}=0$$

$$\Delta=(2(\sqrt{2}-1))^2-4\times4\times(-\sqrt{2})$$

$$\Delta=(2\sqrt{2}-2)^2+16\sqrt{2}$$

$$\Delta=4\times2-2\times2\times\sqrt{2}\times2+4+16\sqrt{2}$$

$$\Delta=12+8\sqrt{8} \;=\; (2+2\sqrt{2})^2$$

$$X_1 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)-(2+2\sqrt{2})}{8} \qquad X_2 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)+(2+2\sqrt{2})}{8}$$

$$X_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad X_2 = \frac{1}{2}$$

c) En déduire les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $f(x)=0$

f(x) = 0 si et seulement si $\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4} \\ x=-\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Partie B

1) Montrer que 1 est une racine du polynôme P(X) = $2X^3-17X^2+7X+8$

$P(1)=2-17+7+8=0$ donc 1 racine de P

2) Déterminer les valeurs des réels a , b et c tels que $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$

P(X)=... = $aX^3+(-a+b)X^2+(-b+c)X-c \;=\; 2X^3-17X^2+7X+8$

Par identification, on obtient donc : $\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-17 \\ -b+c=7 \\ -c=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=-15 \\ c=-8 \end{cases}$

$$P(X)=(X-1)(2X^2-15X-8)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin^3(x)-17\sin^2(x)+7\sin(x)+8=0$$

On pose X = sin(x) donc l'équation devient : $2X^3-17X^2+7X+8=0$

$$(X-1)(2X^2-15X-8)=0$$

$$X = 1 \text{ ou } 2X^2-15X-8=0$$

$$\Delta=289=17^2$$

$$X_1=\frac{15+17}{4}=8 \text{ ou X\_2=...= } -\frac{1}{2}$$

on a donc $\sin(x)=1$ ou $\sin(x)=8$ ou $\sin(x)=-\frac{1}{2}$

$\sin(x)=8$ est impossible car 8 > 1 d'où

$\sin(x)=1$ donne $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ et

$\sin(x)=-\frac{1}{2}$ donne $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou x = $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

<u>Exercice 2 :</u>

On considère l'algorithme suivant :

```
from math import pi
EcartMax=22/7-pi
for N in range(1,200):
    for D in range(1,200):
        if abs(N/D-pi)<EcartMax:
            print(N,D)
```

1) Expliquer à quoi sert la première ligne de cet algorithme.

En langage python, il faut parfois importer certaines commandes non dispo immédiatement comme ici le nombre pi présent dans la bibliothèque math

2) a) En effectuant une recherche sur internet, expliquer ce que représente la fameuse valeur $\frac{22}{7}$

22/7 est la valeur approchée de pi introduite par Archimède et qui fut utilisé durant de nombreuses années

b) Programmer cet algorithme et donner son affichage.

L'affichage donne 179 57

c) Expliquer alors ce que fait cet algorithme

Cet algorithme détermine une valeur approchée fractionnaire de pi meilleure que 22/7 pour un dénominateur et numérateur compris entre 1 et 200