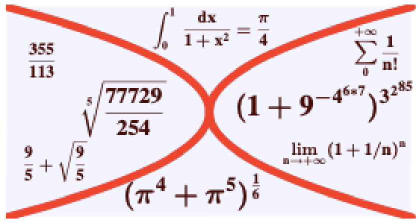

Devoir Surveillé Première
Le second degré

Exercice 1 :

1) Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $3x^2-12x+19$

a) Déterminer la forme canonique de la fonction f

$$f(x)=3\left(x^2-4x+\frac{19}{3}\right) = 3\left((x-2)^2-4+\frac{19}{3}\right) = 3\left((x-2)^2+\frac{7}{3}\right) = 3(x-2)^2+7$$

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f

$a=3>0$ donc la parabole a ses branches tournées vers le haut et le sommet est $S(2;7)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	7	↗

2) Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=-2x^2-7x+15$

a) Déterminer les racines de g

$\Delta = (-7)^2-4\times(-2)\times 15 = 49+120=169 > 0$ donc deux racines

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\text{DELTA}}}{2a}$ $\quad$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\text{DELTA}}}{2a}$

$x_1=\frac{7-13}{-4}$ $\quad$ $x_2=\frac{7+\sqrt{169}}{-4}$

$x_1=\frac{3}{2}$ $\quad$ $x_2=-5$

b) En déduire une factorisation de g(x)

On a donc $g(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)$

c) L'équation $g(x)=-70$ admet-elle des solutions ? Si oui, lesquelles.

$g(x)=-70$ Donc $-2x^2-7x+15=-70$

$-2x^2-7x+85=0$

$\Delta = 49-4\times(-2)\times 85$

$\Delta = 49+680 = 729 = 27^2 > 0$ donc deux solutions

$x_1=\frac{7-27}{-4} = 5$ $\quad$ $x_2=\frac{7+27}{-4} = -\frac{17}{2}$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes dans ℝ .

1) $-x^2+4x+5=0$ $\Delta = 16-4\times(-1)\times 5 = 36 > 0$ deux solutions $x_1=\frac{-4-6}{-2}$ $\quad$ $x_2=\frac{-4+6}{-2}$ $x_1=5$ $\quad$ $x_2=-1$	2) $2x^2-5x+7=0$ $\Delta = 25-4\times 2\times 7 = 25-56 = -31 <0$ donc pas de solution
3) $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=0$	4) $3x^2-2x-7=2$ $3x^2-2x-9=0$

$\Delta = 4-4\times\frac{-1}{3}\times(-3) = 0$ donc une solution $x_1=\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{\frac{-2}{3}} = 3$	$\Delta = 4-4\times3\times(-9) = 112 > 0$ donc deux solutions : $x_1=\frac{2-\sqrt{112}}{6}$ $x_2=\frac{2+\sqrt{112}}{6}$ $x_1=\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ $x_2=\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$

<u>Exercice 3 :</u> Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

1) $x^2-2x<0$

$x^2-2x=x(x-2)$ donc polynôme du second degré de racines 0 et 2 . le polynôme est donc du signe de a sauf entre ses racines :

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
signe de x^2-2x a = 1 > 0	+ 0 – 0 +

S = $]0;2[$

2) $6x^2-15x+6\geq0$

$\Delta = (-15)^2-4\times6\times6 = 225-144=81 > 0$ deux racines

$x_1=\frac{15-9}{12}$ $x_2=\frac{15+9}{12}$

$x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=2$

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 2 $+\infty$
signe de $6x^2-15x+6$ a = 6 > 0	+ 0 – 0 +

S = $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$

3) $\frac{-3x^2-4x+7}{2x+1}\geq0$

$-3x^2-4x+7$ $\Delta=16-4(-3)\times7$ = 16+84 = 100 > 0 deux racines

$x_1=\frac{4-10}{-6}$ $x_2=\frac{4+10}{-6}$

$x_1=1$ $x_2=-\frac{7}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-7}{3}$		$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
signe de $-3x^2-4x+7$	–	0	+	‖	+	0	–
signe de $2x+1$	–	⋮	–	‖	+	⋮	+
signe du quotient	+	0	–	‖	+	0	–

$S = \left]-\infty;-\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{-1}{2};1\right]$

Exercice 4 : Soit l'équation (E_m) : $(m+3)x^2+mx+1=0$ avec m ∈ ℝ .

1) Si m = -3 que peut-on dire de l'équation ? Résoudre alors cette équation (E_{-3}) .

Si m = -3 , l'équation devient $-3x+1=0$ ce n'est plus une équation du second degré . La solution est x = $\frac{1}{3}$

2) Dans cette question , m ≠ -3 . Montrer que Δ peut s'écrire : $\Delta=(m+2)(m-6)$

Δ = $m^2-4(m+3)\times 1$ = $m^2-4m-12$ or $(m+2)(m-6)=m^2-6m+2m-12=m^2-4m-12$

donc $\Delta=(m+2)(m-6)$

3) En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet une seule solution

L'équation admet une unique solution pour $\Delta=0$ ce qui est le cas pour m = -2 et m = 6

Exercice 5 : Une équation bicarrée est une équation de la forme : $ax^4+bx^2+c=0$

1) On veut résoudre l'équation bicarrée (E) : $x^4-6x^2+8=0$. On pose X = x^2

a) Quelle condition doit vérifier X ?

X doit être positif

b) Résoudre l'équation $X^2-6X+8=0$

$\Delta=36-32=4$ > 0 donc deux solutions $X_1=\frac{6-2}{2}$ = 2 et $X_2=\frac{6+2}{2}$ = 4

c) En déduire les solutions de (E)

On doit donc avoir $x^2=2$ ce qui donne x = $\pm\sqrt{2}$

ou $x^2=4$ ce qui donne x = ± 2

donc quatre solutions S = { $-\sqrt{2};-2;\sqrt{2};2$ }

2) En appliquant la même méthode, résoudre $x^4-8x^2-9=0$

On pose $X=x^2$ donc l'équation devient $X^2-8X-9=0$ de $\Delta=64+36=100$ >0 donc deux solutions

$X_1=\frac{8-10}{2}$ = -1 ou $X_2=\frac{8+10}{2}$ = 9

d'où $x^2=-1$ ce qui est impossible car un carré ne peut être négatif

$x^2=9$ donne x = ± 3

donc deux solutions S = { $-3;3$ }

Exercice 6 (facultatif) : Déterminer les réels x et y vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x+y=29 \\ xy=198 \end{cases}$$

on a deux nombres de sommes S = 29 et de produit P=198 ils sont donc solutions de l'équation :

$x^2 - \mathrm{S}\,x + \mathrm{P} = 0$ c'est à dire $x^2 - 29\,x + 198 = 0$

$\Delta = 49 > 0$ donc deux solutions

$x_1 = \dfrac{29-7}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{29+7}{2}$

$x_1 = 11$ $\quad x_2 = 18$