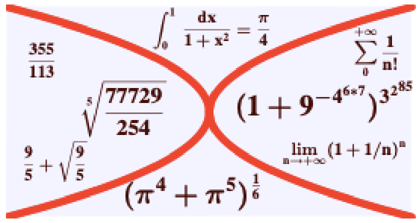
DM Première B



Exercice 1 :

On pose (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n ≥ 1 par $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

1) Calculer u_1 , u_2 , u_3

$u_1=1$, $u_2=1\times2=2$, $u_3=1\times2\times3 = 6$

2) Déterminer une relation entre u_n et u_{n+1}

$u_{n+1}=1\times2\times\ldots\times n\times(n+1) = u_n\times(n+1)$

3) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

$u_{n+1}-u_n=(n+1)u_n-u_n = nu_n$. Or u_n étant un produit d'entiers naturels, u_n est positif d'où comme n est positif, on a nu_n positif cad $u_{n+1}-u_n$ positif et la suite est croissante .

A noter que l'on pouvait aussi étudier le quotient : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)u_n}{u_n} = n+1$

D'où pour tout entier naturel n , $n+1\geq1$ cad $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ soit $u_{n+1}>u_n$ et la suite est croissante

4) On veut déterminer la valeur de u_{50} à l'aide d'un programme

Recopier et compléter ce programme en Python :

```
U=1
for i in range ( 1 , 50 ) :
     U = (i+1)*U
print( U )
```

Exercice 2 :

Un jeu en ligne est retiré du site qui l'héberge s'il y a moins de 1000 joueurs par semaine. Ce jeu qui compte actuellement 7500 joueurs hebdomadaires perd 20 % de joueurs par semaine mais il en gagne 300 dans le même temps.

On appelle (u_n) la suite donnant le nombre de joueurs la semaine n. On a donc $u_0=7500$

1) Déterminer la relation de récurrence définissant la suite (u_n)

Il perd 20% de joueurs par semaine, il en reste donc 80% de la semaine précédente et comme il y en a 300 de plus , on a donc $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+300$

2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-1500$

a) Conjecturer la forme explicite de (v_n) . En déduire alors celle de (u_n) .

Commencer par calculer u_1 , u_2 , u_3

$u_1=0{,}8\,u_0+300=6300$, $u_2=0{,}8\times u_1+300=5340$, $u_3=0{,}8\times u_2+300=4572$

Calculons alors les premiers termes v_0 , v_1 , v_2 , v_3

$v_0=u_0-1500=6000$, $v_1=u_1-1500=4800$, $v_2=u_2-1500=3840$, $v_3=u_3-1500=3072$

On peut alors constater que les quotients $\frac{v_1}{v_0}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}=0{,}8$

On peut donc conjecturer que $\frac{v_{n+1}}{v_n}=0{,}8$ soit $v_{n+1}=0{,}8\times v_n$ ce qui signifie que :

$v_1=0{,}8\,v_0$, $v_2=0{,}8\,v_1=0{,}8\times 0{,}8\times v_0=0{,}8^2\times v_0$, $v_3=0{,}8\times v_2=0{,}8^3\,v_0$

donc $v_n=0{,}8^n\times v_0=6000\times 0{,}8^n$

et on a alors $u_n=v_n+1500=6000\times 0{,}8^n+1500$

b) Le nombre de joueurs diminue-t-il ou augmente-t-il ? Justifier la réponse

Il faut trouver le sens de variation de la suite (u_n) . Etudions pour cela le signe de $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=6000\times 0{,}8^{n+1}+1500-6000\times 0{,}8^n-1500 = 6000\times 0{,}8^{n+1}-6000\times 0{,}8^n$

$= 6000\times 0{,}8^n(0{,}8-1) = 6000\times 0{,}8^n\times(-0{,}2) = -1200\times 0{,}8^n$

On a donc $u_{n+1}-u_n<0$ donc $u_{n+1}<u_n$ et la suite est décroissante .

Le nombre de joueurs diminuent donc

3) Le responsable du jeu veut savoir au bout de combien de semaine le jeu sera retiré du site.
Que pouvez-vous lui répondre ? Justifier la réponse

En programmant la suite par exemple avec un tableur, on peut se rendre compte que cette suite semble tendre vers 1500 ainsi le jeu ne sera donc pas retiré du site

Exercice 3 : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

1) Soit f et g les fonctions définies sur IR par $f(x)=\frac{2x}{x^2+9}$ et $g(x)=(2{,}4x^2-5x+3)\sqrt{x}$

a) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette dérivée

On est en présence d'un $\frac{u}{v}$ avec u(x)=2x et $v(x)=x^2+9$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+9)-2x\times(2x)}{(x^2+9)^2} = \frac{-2x^2+18}{(x^2+9)^2} .$$

Pour tout réel x, $(x^2+9)^2$ est positif ainsi le signe de f' est celui de $-2x^2+18$

$-2x^2+18=0$ donne $x^2=9$ d'où $x=\pm 3$. Ce polynôme du second degré est donc du signe de a sauf entre ses racines donc :

pour tout x ∈]-∞;-3[∪ [3;+∞[, $f'(x)$ est négatif

pour tout x ∈ [-3;3], $f'(x)$ est positif

b) Même question avec la dérivée $g'(x)$

g est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=2{,}4x^2-5x+3$ et $v(x)=\sqrt{x}$ d'où

$$g'(x)=(4{,}8x-5)\times\sqrt{x}+(2{,}4x^2-5x+3)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{(4{,}8x-5)\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2{,}4x^2-5x+3}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{9{,}6\,x^2-10\,x+2{,}4\,x^2-5\,x+3}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{12\,x^2-15\,x+3}{2\sqrt{x}}$$

Pour tout réel x, $2\sqrt{x}$ est positif donc le signe de g' est celui de $12\,x^2-15\,x+3$

$\Delta=81>0$ donc deux racines $x_1=\frac{1}{4}$ et $x_2=1$. g' est donc du signe de a sauf entre ses racines c'est à dire :

pour tout x ∈ $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$ ∪]1;+∞[, g'(x) est positif

pour tout x ∈ $\left]\frac{1}{4};1\right[$, g'(x) négatif

2) g is the function defined on ℝ by : $g(x)=px^3+qx^2$ with p, q real numbers.

Determine p and q given that the curve of g has a tangent at the point $(1;-1)$ parallel to the x-axis

La tangente en 1 doit être parallèle à l'axe des abscisses donc tangente horizontale donc nombre dérivé qui s'annule : $g'(1)=0$ et on a en plus $g(1)=-1$

On a : $g'(x)=3\,px^2+2\,qx$

$\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(1)=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3\,p+2\,q=0 \\ p+q=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} p=-q-1 \\ 3(-q-1)+2\,q=0 \end{cases}$ $\begin{cases} p=-q-1 \\ -3\,q-3+2\,q=0 \end{cases}$ $\begin{cases} p=-q-1 \\ q=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} p=2 \\ q=-3 \end{cases}$