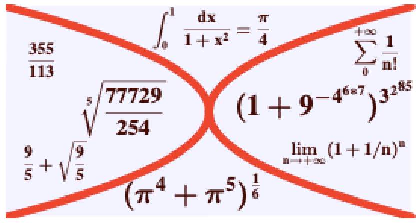
DM 5 Première B



Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n^2+3u_n-\frac{3}{2}$

1) Calculer u_1 et u_2 . On donnera les valeurs exactes en détaillant les calculs

$u_1=-\frac{1}{2}u_0^2+3u_0-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times 4+6-\frac{3}{2} = 4-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$u_2=-\frac{1}{2}u_1^2+3u_1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}+3\times\frac{5}{2}-\frac{3}{2} = \frac{-25}{8}+\frac{15}{2}-\frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3 et u_4

$u_3 \approx 2{,}99219$ et $u_4 \approx 2{,}99997$

3) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite éventuelle.

Il semble que la suite soit croissante et converge vers 3

4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-3$

a) Démontrer que pour tout n, $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n^2$

$v_{n+1}=u_{n+1}-3 = -\frac{1}{2}u_n^2+3u_n-\frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}(u_n^2-6u_n+9) = -\frac{1}{2}(u_n-3)^2 = -\frac{1}{2}v_n^2$

b) Démontrer que $v_{n+1}-v_n=-v_n\left(\frac{1}{2}v_n+1\right)$

$v_{n+1}-v_n = -\frac{1}{2}v_n^2-v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n+1\right)$

c) On admet que pour tout entier naturel n, $-1\le v_n\le 0$.

En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

comme v_n est négatif (car on admet que $v_n\le 0$) on a donc $-v_n$ qui est positif donc le signe

de $v_{n+1}-v_n$ est celui de $\frac{1}{2}v_n+1$. Or $-1\le v_n\le 0$

$$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}v_n\le 0$$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}v_n+1\le 1$$

D'où $\frac{1}{2}v_n+1$ est positif, on en déduit que $v_{n+1}-v_n\ge 0$

$$v_{n+1}\ge v_n$$

(v_n) est donc croissante

5) Quelle conjecture émise à la question 3) ce résultat sur le sens de variation de la suite (v_n) permet-il de justifier ?

On sait que $u_n = v_n + 3$ d'où $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$, ainsi comme $v_{n+1} - v_n$ est positif, $u_{n+1} - u_n$ aussi et on a donc (u_n) suite croissante (deuxième conjecture)

<u>**Exercice 2 :**</u>

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n ≥ 1 , $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$

1) Calculer u_2 , u_3 , u_4 . On donnera les valeurs exactes en détaillant les calculs

$u_2 = \frac{1+1}{3 \times 1} u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ $\qquad$ $u_3 = \frac{3}{6} u_2 = \frac{3}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

2) Proposer un algorithme en langage python afin de calculer le terme de rang n de cette suite.

Voir cours

3) On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour $n \geq 1$.

a) Démontrer que $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{3n} \times u_n \times \frac{1}{n+1} = \frac{u_n}{3n} = \frac{1}{3} v_n$$

b) En calculant les premiers termes de la suite (v_n) , conjecturer la forme explicite de cette suite.

$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $v_2 = \frac{1}{9}$ $\qquad$ $v_3 = \frac{1}{27}$ Il semble que $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4) Montrer que $u_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout n ≥ 1

En admettant que $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, on a $u_n = n \times v_n = n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

5) Etudier alors le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((n+1) \times \left(\frac{1}{3}\right) - n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(-\frac{2}{3} n + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{-2n+1}{3}\right)$$

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc celui de $-2n+1$ car le reste est positif d'où

$$-2n+1 > 0$$
$$-2n > -1$$
$$n < \frac{1}{2}$$

Ainsi , pour n ≥ 1 , $-2n+1$ est négatif ce qui donne $u_{n+1} - u_n < 0$

$$u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est donc décroissante