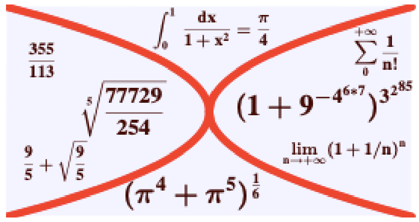

<u>DM3 première B</u>

Partie A

On considère un polynôme du troisième degré f définie par f(x) = ax^3+bx^2+cx+d où a , b , c et d sont quatre réels avec a ≠ 0

1) Soit α un réel. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f(x)-f(\alpha)=a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)$$

$f(x)-f(\alpha) = ax^3+bx^2+cx+d-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d = a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)$

2) Montrer que $x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$

$(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2) = x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x-\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha^3 = x^3-\alpha^3$

3) En déduire que si le réel α est une racine du polynôme f alors f peut se factoriser par $x-\alpha$

On a $x^2-\alpha^2 = (x-\alpha)(x+\alpha)$ d'où en insérant cette expression et celle de $x^3-\alpha^3$ dans l'expression de $f(x)-f(\alpha)$ obtenue à la question 1 , on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)-f(\alpha) &= a(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)+b(x-\alpha)(x+\alpha)+c(x-\alpha) \\ &= (x-\alpha)(a(x^2+\alpha x+\alpha^2)+b(x+\alpha)+c) \\ &= (x-\alpha)\mathrm{P}(x) \text{ où P(x) est un polynôme de second degré} \end{aligned}$$

Ainsi si α est une racine de f on a $f(\alpha)=0$ d'où l'expression précédente devient: $f(x)=(x-\alpha)\mathrm{P}(x)$ d'où la réponse

Partie B Application

On considère les deux polynômes suivants : P(x) = $-x^3+7x^2-14x+8$ et R(x) = $x^2-7x+12$

1) Démontrer que 4 est une racine de P et R

$\mathrm{P}(4)=-4^3+7\times 4^2-14\times 4+8=-64+7\times 16-56+8=-64+112-56+8=-120+120=0$

2) Déterminer les réels a , b puis les réels c et d tels que :

P(x) = $(x-2)(x-4)(ax+b)$ et R(x) = $(x-4)(cx+d)$

- $\mathrm{P}(x)=(x-2)(x-4)(ax+b) = (x^2-4x-2x+8)(ax+b) = (x^2-6x+8)(ax+b)$

$= ax^3+bx^2-6ax^2-6bx+8ax+8b = ax^3+(b-6a)x^2+(-6b+8a)x+8b$

Or on sait que $\mathrm{P}(x)=-x^3+7x^2-14x+8$ d'où en identifiant les coefficients , on obtient :

$$\begin{cases} a=-1 \\ b-6a=7 \\ -6b+8a=-14 \\ 8b=8 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

d'où $\mathrm{P}(x)=(x-2)(x-4)(-x+1)$

Pour mieux comprendre, on fait correspondre les couleurs :

$$ax^3+(b-6a)x^2+(-6b+8a)x+8b=-1x^3+7x^2-14x+8$$

- $\mathrm{R}(x)=(x-4)(ax+b) = ax^2+bx-4ax-4b = ax^2+(b-4a)x-4b$

or on sait que $R(x)=x^2-7x+12$ donc par identification $\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-7 \\ -4b=12 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

d'où $R(x)=(x-4)(x-3)$

3) Résoudre à l'aide d'un tableau de signe l'inéquation $\frac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

$\frac{P(x)}{R(x)}=\frac{(x-2)(x-4)(-x+1)}{(x-4)(x-3)} = \frac{(x-2)(-x+1)}{(x-3)}$ avec x = 4 comme valeur interdite

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
signe de $-x+1$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
signe de $x-3$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$-$	

S =]–∞;1] ∪ [2;3[

<u>Partie C</u>

En s'inspirant des questions précédentes et en expliquant la démarche, résoudre l'inéquation $f(x)\geq 0$ sachant que $f(x)=-2x^4+2x^3+26x^2-2x-24$

On peut remarquer que 1 et -1 sont des racines de f(x) donc on peut factoriser f(x) ainsi :

$f(x)=(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)$

On développe et on identifie a , b et c

$f(x)=(x^2-1)(ax^2+bx+c) = ax^4+bx^3+cx^2-ax^2-bx-c = ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c$

On on sait que $f(x)=-2x^4+2x^3+26x^2-2x-24$ d'où on identifie les coefficients :

$\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c-a=26 \\ -b=-2 \\ -c=-24 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=24 \end{cases}$ on a donc $f(x)=(x-1)(x+1)(-2x^2+2x+24)$

$-2x^2+2x+24$: $\Delta=2^2-4\times(-2)\times 24 = 196 > 0$ donc deux racines $x_1=4$ et $x_2=-3$ le trinome est donc du signe de a sauf entre ses racines d'où le tableau :

x	$-\infty$		-3		-1		1		4		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
signe de $x-1$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
signe de $-2x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	0	$-$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où S = $[-3;-1] \cup [1;4]$