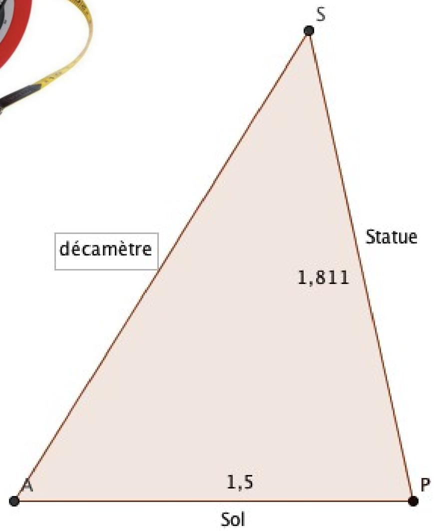
Dans la cour d'un lycée, on souhaite installer une statue du mathématicien Evariste Galois. Elle mesure 1,811 m , en hommage à son année de naissance

A cause de la forme de la statue, on ne peut pas utiliser d'équerre afin de l'ériger perpendiculairement au sol. Ainsi Sophie décide d'accrocher un décamètre (**graduée en mm**) au sommet S du crâne de Galois et de mesurer la distance entre ce point S et un autre point A situé à 1,5 m du pied de la statue.

Elle affirme ensuite que la quantité $p = AS^2 - AP^2 - PS^2$ lui permettra de répondre au problème posé



1) a) Quelle doit être la valeur de p pour que la statue soit perpendiculaire au sol. Quelle serait alors la mesure de AS ?
   b) Expliquer pourquoi il n'est pas possible d'obtenir une mesure de AS aussi précise avec le décamètre.
   c) Quelle valeur de AS Sophie pourra-t-elle prendre sur le décamètre pour avoir une statue la plus stable possible. Combien vaudra alors p ?

2) Avec des vecteurs
   Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs , noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ par : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
   a) Tracer un vecteur $\vec{u}$ d'origine A et d'extrémité B puis un vecteur $\vec{v}$ d'origine B et d'extrémité C puis exprimer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de AB , AC et BC
   b) En vous inspirant de la question 1), expliquer pourquoi on peut dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

3) Un problème de définition
   3.1) Le professeur de Paul a défini le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

   Celui de Daniel a donné cette définition :

   Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et de $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est donné par

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

   Qui a raison ?

   <u>**Petit rappel :**</u> Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

   3.2) Celui de Pascal a donné : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

   A-t-il lui aussi raison ?

3.3) Toujours plus loin

Elisa affirme alors qu'en introduisant l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut trouver deux formules supplémentaires. Elle construit alors la figure suivante où $\vec{i}$ est le vecteur défini par $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

a) Que peut-on dire du vecteur $\vec{i}$?

b) Construire alors le vecteur $\vec{j}$ défini par $(\vec{i}\,;\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Qu'avons-nous construit ainsi ?

c) Déterminer alors les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en déduire une autre formule du produit scalaire