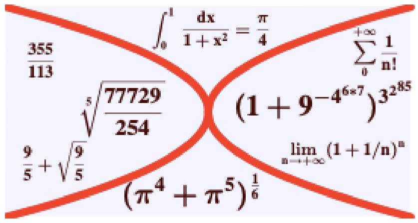


Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{2+3u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2) On suppose que pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq 0$ et on définit la suite (v_n) par $v_n=\dfrac{1}{u_n}$

   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n

3) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

Exercice 2 :

1) (u_n) est une suite géométrique de raison q > 0 telle que $u_1=12$ et $u_5=3072$. Calculer q puis u_7

2) (v_n) est une suite arithmétique de raison r telle que $v_1=-6$ et $v_1+v_2+\ldots+v_8=92$.
   Calculer v_8 et r

3) Déterminer trois nombres a , b , c en progression arithmétique dont la somme est 27 et la somme des carrés est 261

4) La suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=3$.
   Calculer n sachant que $u_0+u_1+\ldots+u_n=196605$

Exercice 3 : Calculer les sommes suivantes :

1) S = $1+3+3^2+\ldots+3^{12}$

2) S = $8+9+10+\ldots+20$

2) S = $1-2+4-8+\ldots+1024-2048$

3) S = $4+7+10+\ldots+64$

4) S = $\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\ldots+16\sqrt{2}$

Exercice 4 Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\frac{1}{4}(2^n+4n-5) \quad \text{et} \quad v_n=\frac{1}{4}(2^n-4n+5)$$

1) Calculer u_0 , u_1 , v_0 et v_1

2) Montrer que la suite (a_n) de terme général $a_n = u_n+v_n$ est géométrique de raison 2

   Calculer la somme $S_a(n)=a_0+a_1+\ldots+a_n$

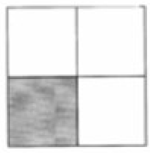
3) Montrer que la suite (b_n) de terme général $b_n = u_n-v_n$ est arithmétique de raison 2

   Calculer la somme $S_b(n)=b_0+b_1+\ldots+b_n$

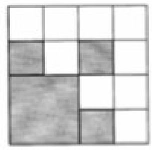
4) En déduire les sommes $S_u(n)=u_0+u_1+\ldots+u_n$ et $S_v(n)=v_0+v_1+\ldots+v_n$

<u>Exercice 5 :</u> On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

- Première étape du coloriage :
  On partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indique sur la figure .



- Deuxième étape du coloriage :
  On partage chaque carré non encore colorié en quatre carré de même aire et on colorie dans chacun , le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé

Pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire exprimée en cm^2 de la surface totale coloriée après n coloriages . On a ainsi $A_1=1$

La surface coloriée sur la figure de la 2ème étape a donc pour aire A_2

Les deux parties suivantes A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1) Calculer A_2 puis montrer que $A_3=\frac{37}{16}$

2) On considère l'algorithme ci-contre
a) Faire fonctionner cet algorithme pour P = 2
b) Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n . Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse . Justifier la réponse .
		P = input("entrer votre entier")
		N = 1
		U = 1
		While N ≤ P :
		    print(U)
		    N = N + 1
		    U = $\frac{5}{4}\times U+\frac{1}{2}$

<u>Proposition 1:</u> Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n=A_n$

<u>Proposition 2:</u> Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 tel que $U_n=A_n$

Partie B

1) Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n

2) On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $B_n=A_n-4$

   a) Montrer que (B_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

   b) Exprimer, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, le terme général B_n en fonction de n, et en déduire celui de A_n

3) Conjecturer le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?
   Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec la surface coloriée

4) Comment transformer l'algorithme afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $A_n > 3{,}99$.
   Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice

Exercice 6 : Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2000. Elle a le choix entre deux contrat. Dans les deux cas le loyer annuel est de 3600 € et le locataire s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

1) **Contrat 1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 6 % du loyer de l'année précédente.

On note (u_n) le loyer annuel pour l'année 2000 + n

a) Préciser les valeurs de u_0, u_1 et u_2

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier la réponse

c) Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_6 (arrondir à l'unité)

d) Soit G_n la somme payée à l'issue de n+1 années de contrat. Exprimer G_n en fonction de n.

2) **Contrat 2:**

Le locataire accepte une augmentation annuelle constante de 300 € du loyer de l'année précédente.

On note v_n le loyer annuel pour l'année 2000 + n

a) Préciser les valeurs de v_0 , v_1 et v_2

b) Quelle est la nature de la suite (v_n)? Justifier la réponse

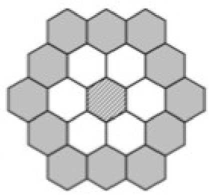
c) Exprimer v_n en fonction de n. Calculer v_6 (arrondir à l'unité)

d) Soit A_n la somme payée à l'issue de n+1 années de contrat. Exprimer A_n en fonction de n.

3) Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire à l'issue des 9 années ? Justifier

4) On suppose maintenant que le locataire reste dans la maison 20 ans aux mêmes conditions d'augmentations annuelles. A partir de quelle année le contrat 2 aura été le plus avantageux ? Justifier la réponse.

Exercice 7 : Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce. Le carrelage a une forme hexagonale. L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède de la façon suivante :



- à l'étape 1, il entoure le carreau central à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme .
- A l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédente

On note (u_n) le nombre de carreaux ajoutés à l'étape n (n ≥ 1) . Ainsi $u_1=6$ et $u_2=12$.

1) Quelle est la valeur de u_3?
2) On admet que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Exprimer u_n en fonction de n
3) Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour l'étape 5 ?
   Combien a-t-il posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 ? (en comptant le carreau central)
4) On pose $S_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. Montrer que $S_n=3n^2+3n$
5) Si on compte le premier carreau central, à la fin de la semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977^e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?