Chapitre 7 : Trigonométrie

I- Une nouvelle unité d'angle

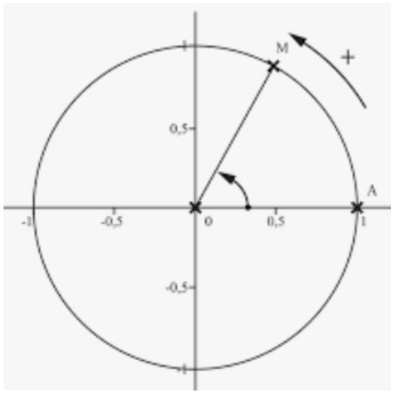
a) Le radian

Définition : Le radian (symbole rad) est une unité de mesure des angles choisie de façon qu'un angle plat de 180° mesure π radians.

Remarque :

- Les mesures des angles en radian et en degré sont donc proportionnelles
  Si α est la mesure de l'angle en radian et x celle degré, on a : $\alpha = \frac{\pi}{180} \times x$
- Le tableau suivant des équivalences est à connaître :

x (degré)	0	30	45	60	90	180	360
α (radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π



b) Le cercle trigonométrique

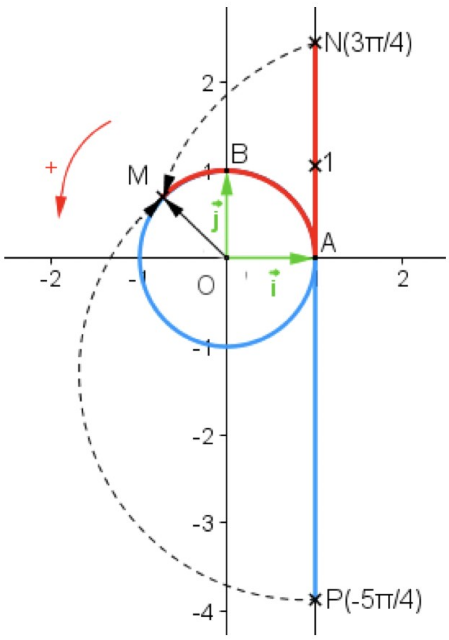
Définition Le cercle trigonométrique est un cercle orienté de rayon 1

Remarques :

- Ce cercle est dit orienté car il est muni d'une origine le point A et d'un sens de parcours appelé **sens direct** qui est le sens **contraire** des aiguilles d'une montre

- A noter que, si l'unité est le centimètre, la mesure de l'angle en radian correspond à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique. Ainsi , si $\widehat{AOM} = \alpha$ alors l'arc AM mesure α centimètre

- Pour **repérer un point M du cercle trigonométrique**, on enroule autour du cercle un axe vertical orienté vers le haut, graduée , d'origine A.
  On peut ainsi associer à tout point M du cercle un réel x qui est l'abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M .
  M est alors appelé le point-image de x sur le cercle trigonométrique



c) Mesure principale d'un angle

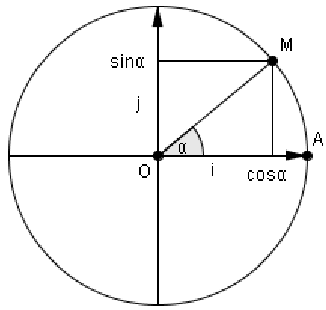
Soit M un point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$. On peut alors donner une infinité de mesure à cet angle. Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
On note $\widehat{OAM} = x + 2k\pi = x \ (2\pi)$ ce qui se lit x à 2π près

Définition : Parmi toutes les mesures que peut prendre un angle orienté, la seule appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est appelée la **mesure principale** de l'angle.

Exemple : $\frac{29\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi}{6}$ donc $\frac{29\pi}{6} = \frac{17\pi}{6} (2\pi)$ $\frac{7\pi}{3} + 8\pi = \frac{31\pi}{3}$ donc $\frac{7\pi}{3} = \frac{31\pi}{3} (2\pi)$

II- Cosinus et sinus d'un angle orienté de deux vecteurs

On munit le plan d'un repère orthonormal direct



a) Définition

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que α soit une mesure en radian de l'angle orienté ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM}$) alors le point M a pour **coordonnées** ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$)

Valeurs remarquables

Le tableau ci-contre est à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

b) Premières Propriétés

Pour tout réel x, on a :

- **encadrement** : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- **Relation fondamentale** : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

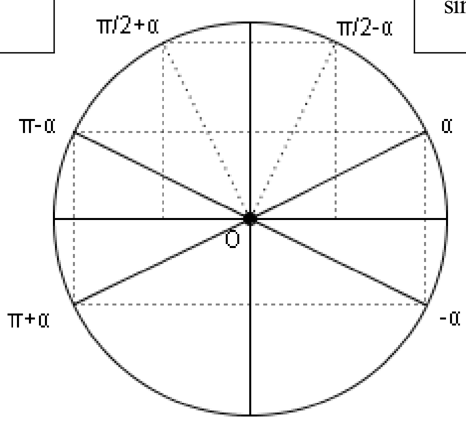
c) Relation entre sinus et cosinus

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos \alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos \alpha$

$\cos(\pi-\alpha) =$
$\sin(\pi-\alpha) =$



$\cos(-\alpha) =$
$\sin(-\alpha) =$

$\cos(\pi+\alpha) =$
$\sin(\pi+\alpha) =$

III- Les fonctions sinus et cosinus

a) Définitions

- La fonction **cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = cos(x)
- La fonction **sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = sin(x)

b) Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Périodicité

Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $x+2\pi$ sont confondus. Ainsi on a : $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$ et $\sin(x)=\sin(x+2\pi)$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π

Parité

Pour tout réel x, les points M associés à x et les points M' associés à –x sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, on a : $\sin(-x)=-\sin(x)$ et $\cos(-x)=\cos(x)$

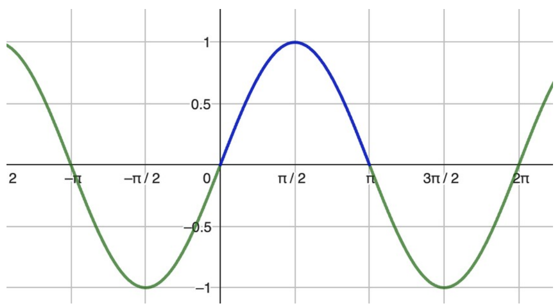
On dit que la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire

- Si une fonction est périodique, la connaissance de la courbe représentative de cette fonction sur une période permet d'obtenir la courbe complète par translation
- **La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**
  La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère

c) Courbe représentative et variations

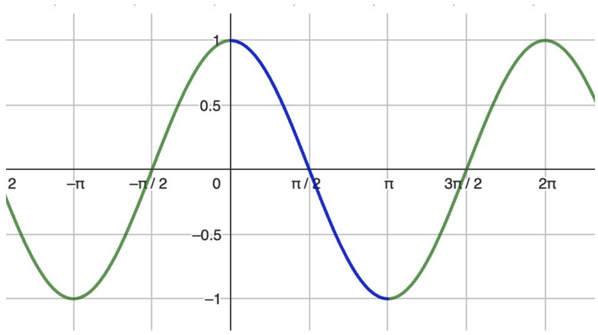
Fonction sinus

x	
sin(x)	



Fonction cosinus

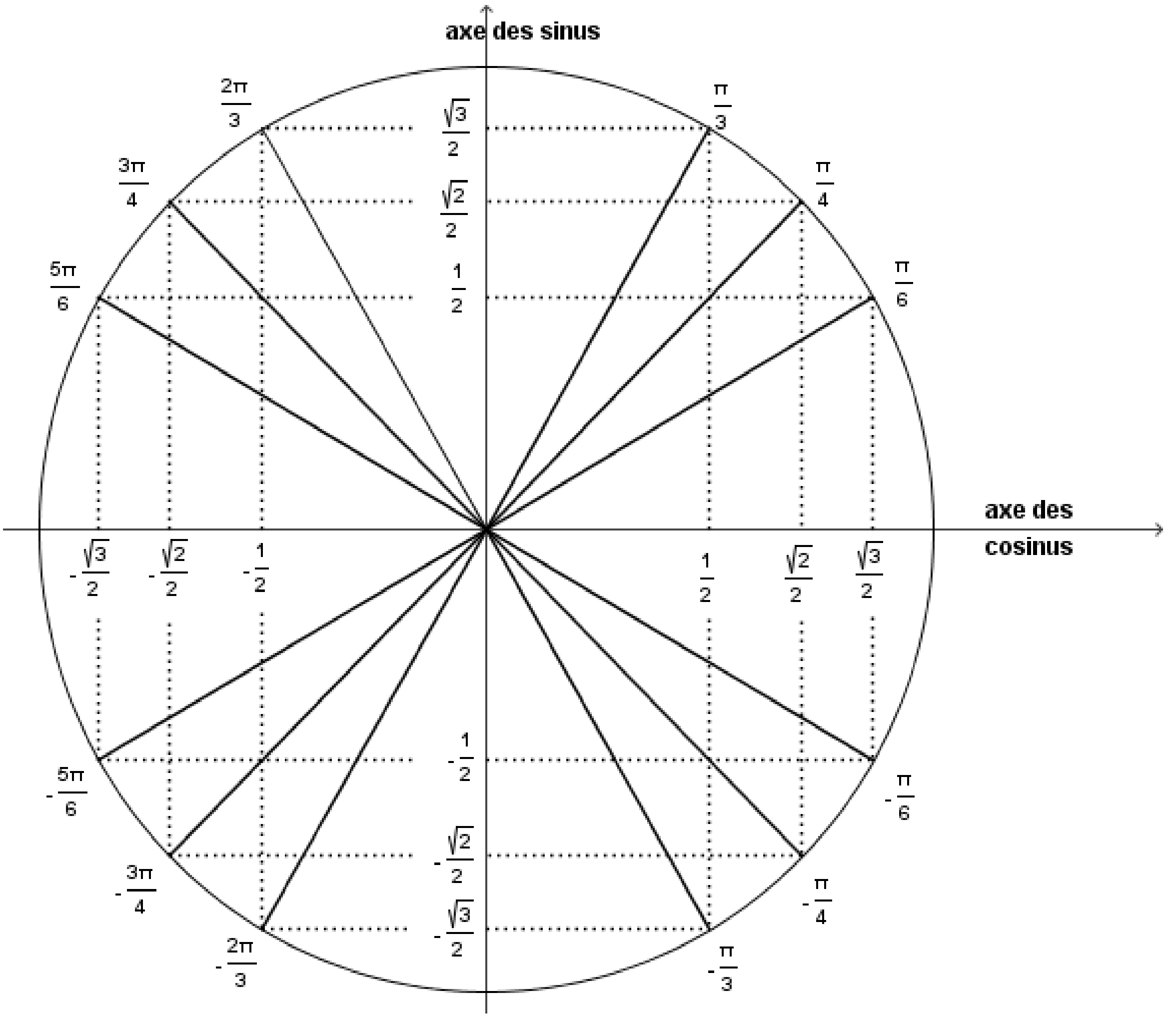
x	
cos(x)	



Une bonne lecture du cercle trigonométrique permet de retrouver le signe de ces deux fonctions

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de cos(x)		–	0	+	0	–	

x	$-\pi$		0		π
Signe de sin(x)		–	0	+	


axe des sinus
axe des cosinus
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$