# Chapitre 6 : Suites numériques

## I- Définition

Définition:
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang $n_0$.

$$(U_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

La notation $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite en tant qu'objet mathématique et $U_n$ désigne le **terme de rang (ou d'indice) n** de la suite ( terme que l'on pourrait noter u(n) mais l'usage en a voulu autrement)

**Exemple : Il existe 2 façons de définir une suite :**

- **Suite définie de manière EXPLICITE ( du type $U_n = f(n)$ )**

**Terme initial de la suite**

$$U_n = \frac{1}{n} \quad \text{pour } n \geq 1$$

On obtient $\mathbf{U_1 = 1}$ , $U_2 = \frac{1}{2}$ , $U_3 = \frac{1}{3}$ etc.......

**Intérêt** on peut calculer le terme que l'on veut directement

- **Suite définie de manière RECURRENTE**

La relation définissant la suite dépend du ( ou des ) terme(s) précédent(s)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + 1} \end{cases}$$

**Terme initial de la suite**

On obtient $U_1 = \sqrt{U_0^2 + 1} = \sqrt{2}$

$U_2 = \sqrt{U_1^2 + 1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

$U_3 = \sqrt{U_2^2 + 1} = \sqrt{3+1} = 2$ etc .......

**Remarque** On ne peut pas calculer un terme sans connaître le (ou les ) précédents. Si on veut calculer $U_{10}$ , il faut connaître $U_9$ et pour connaître $U_9$ il faut connaître $U_8$ etc ........

## II- Un peu de programmation

### a) En algorithmique

Ces algorithmes calculent les termes de la suite récurrente définie ci-dessus

| Algorithme 1 | Algorithme 2 | Algorithme 3 |
|---|---|---|
| <pre>from math import sqrt<br>u=2<br>for i in range(0,n):<br>    u=sqrt(u**2+1)<br>    print(u)</pre> | <pre>from math import sqrt<br>u=2<br>for i in range(0,n):<br>    u=sqrt(u**2+1)<br>print(u)</pre> | <pre>from math import sqrt<br>Liste=[ ]<br>u=1<br>Liste.append(u)<br>for i in range(0,10):<br>    u=sqrt(u**2+1)<br>    Liste.append(u)<br>print(Liste)</pre> |
| On affiche **les n premiers** termes de la suite | On affiche **LE n-ième** terme de la suite | On utilise une variable de type liste |

**b) <u>A la calculatrice</u>** Appliquer les instructions suivante à la suite récurrente précédente :

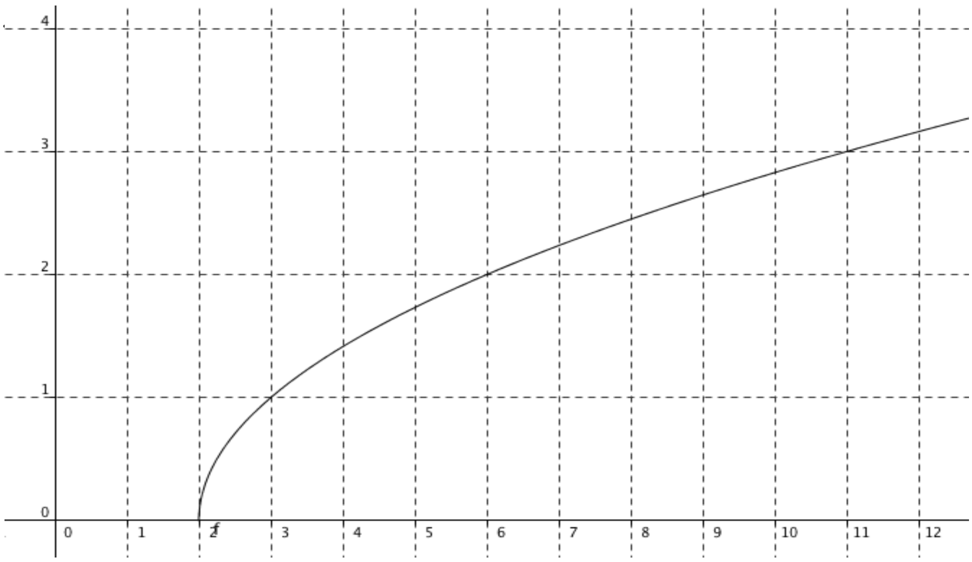
| Casio | Texas Instrument |
| --- | --- |
| Appuyer sur la touche **menu** et choisir le menu **RECUR**<br>Appuyer sur F3 pour sélectionner le type de suite puis entrer l'expression de la suite.<br>F1 : $a_n$ =An+B<br>F2 : $a_{n+1}$ =A$a_n$ +Bn+C<br>F3 : $a_{n+2}$ =A$a_{n+1}$ +B$a_n$ + · · ·<br><br>Appuyer ensuite sur **SET** pour régler la table :<br>Réglage Table n<br>Start:0<br>End :9<br><br>Appuyer ensuite sur **F6** pour obtenir la table | Appuyer sur **mode**<br>Choisir alors le mode **suite** (ou **seq**)<br>Le menu **f(x)** est alors au menu suite :<br>Sélectionner le type de suite souhaité puis entrer l'expression de la suite .<br>TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)<br>nMin=0<br>\u(n)=2n+1<br>u(0)=<br>u(1)=<br><br>Régler alors la configuration de la suite avec **2nde fenêtre**<br>CONFIG TABLE<br>DébutTbl=0<br>ΔTbl=1<br>Indpnt : Auto Demande<br>Dépndte : Auto Demande<br><br>Appuyer alors sur **2nde graphe** pour obtenir la table |

## III- <u>Représentation graphique des termes d'une suite</u>

On se place dans un repère (O , $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ) . On cherche à représenter dans ce repère les termes d'une suite ($U_n$). Cela dépend **alors** du mode de définition de la suite

### a) <u>Si la suite ($U_n$) est définie de manière explicite</u>

On détermine la fonction f telle que **$U_n = f(n)$**. La représentation graphique de la suite ($U_n$) est constituée de l'ensemble des points de coordonnées (n;f(n)) . Les termes de la suite sont donc **les ordonnées** des points d'abscisses entières de la courbe $C_f$




<u>Exemple:</u> $U_n = \sqrt{n-2}$ pour n ≥ 2

$U_n$ = f(n) avec f(x) =

On trace donc le graphe de la fonction f et on considère les ordonnées des points de $C_f$ d'abscisses entières.

### b) <u>Si la suite ($U_n$) est définie de manière récurrente</u>

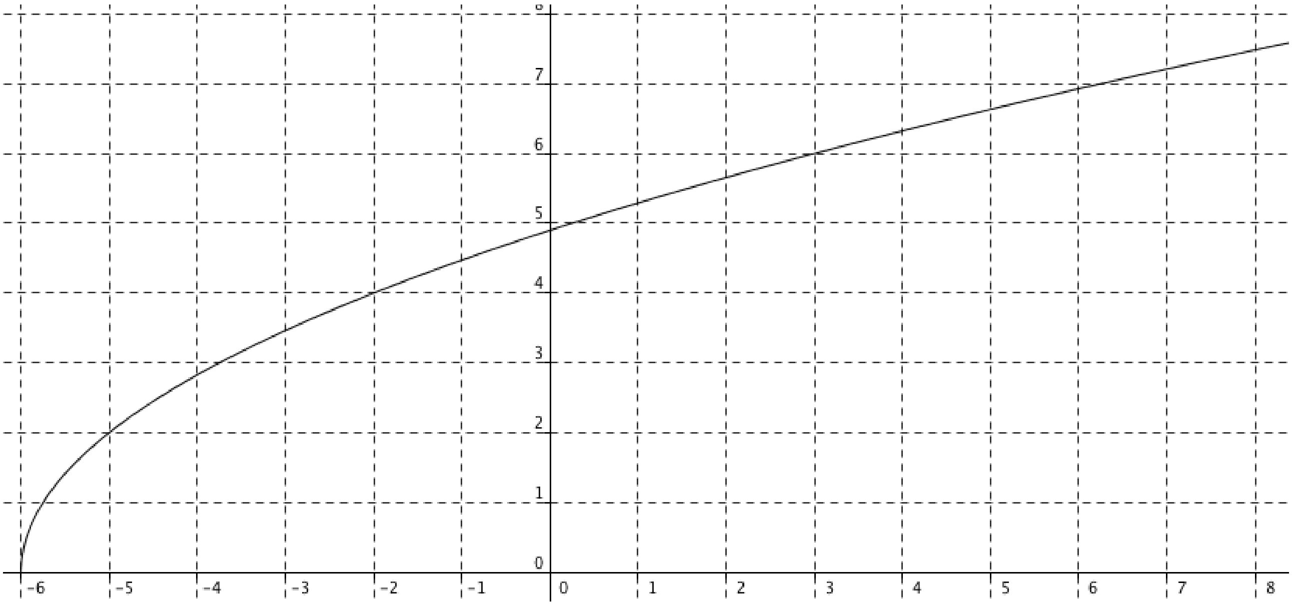
On détermine la fonction f telle que **$U_{n+1} = f(U_n)$**. On trace alors la courbe représentative de f **ET** la droite (d) d'équation y = x Les termes de la suite sont alors obtenus sur **l'axe des abscisses**

**<u>Exemple :</u>** Soit ($U_n$ ) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 6} \end{cases}$$

$U_{n+1} = f(U_n)$ avec f(x) =

On trace donc le graphe de la fonction f et en utilisant la droite (d), on place en abscisse les termes de la suite




## III- Sens de variation d'une suite

### a) Définition

Soit $(U_n)$ une suite de nombres réels

- La suite $(U_n)$ est dite **croissante** à partir du rang $n_0$ lorsque pour tout entier $n \geq n_0$ , $U_n \leq U_{n+1}$
- La suite $(U_n)$ est dite **décroissante** à partir du rang $n_0$ lorsque pour tout entier $n \geq n_0$ , $U_n \geq U_{n+1}$
- La suite $(U_n)$ est dite **monotone** à partir du rang $n_0$ si elle est croissante ou décroissante à partir du rang $n_0$
- La suite $(U_n)$ est dite :
  - **stationnaire** lorsque $U_{n+1} = U_n$ pour tout entier $n \geq n_0$
  - **constante** lorsque $U_{n+1} = U_n$ pour tout entier n

On définit de même la stricte croissance ( ou décroissance) à l'aide d'inégalité stricte.

### b) Méthodes

Qu'une suite soit croissante, décroissante ou constante, il s'agit de comparer $U_n$ et $U_{n+1}$.
Pour cela, on peut :

**Méthode 1 :** Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$

Exemple : $U_n = n^2 - 8n + 18$

**Méthode 2 :** Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1

Exemple : $U_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ .

**Méthode 3 :** Lorsque la suite est définie de manière explicite $U_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle [a ; +∞ [, on peut exploiter les variations de f :

- Si f est croissante sur [ a ; +∞ [, alors pour $n \geq a$ , on a $f(n) \leq f(n+1)$ c'est à dire $U_n \leq U_{n+1}$ et la suite est croissante
- Si f est décroissante sur un intervalle [a ; + ∞ [ alors pour $n \geq a$ , on a $f(n) \geq f(n+1)$ c'est à dire $U_n \geq U_{n+1}$ et la suite est décroissante

Exemple : $u_n = \frac{4n+1}{5n+2}$ . On reparlera plus tard de cette méthode

## IV- Comportement à l'infini

**Définition intuitive : Suite convergente**

On dit qu'une suite converge vers une limite L lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de L lorsque n devient de plus en plus grand . On note alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$

Exemple : $u_n = 5 + \frac{1}{n}$

Quand n devient très grand, on imagine facilement que $\frac{1}{n}$ se rapproche de 0, on peut donc estimer que la suite converge vers 5 ce qui se note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 5$

**Définition intuitive : Suite divergente**

On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente. Deux cas sont possibles :

1. la suite n'a pas de limite
2. les termes de la suite tendent vers +∞ (ou vers –∞)

Dans le deuxième cas, on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemples :

- $u_n = n^2 + 3n$

Quand n devient de plus en plus grand, on imagine que $n^2$ et $3n$ sont aussi de plus en plus grand donc comme on les additionne, on peut penser que la suite diverge et a pour limite +∞

- $u_n = (-1)^n$

  Cette suite a des termes qui valent 1 si n est pair ou –1 si n est impair. On ne peut donc pas donner de limite à cette suite donc elle diverge