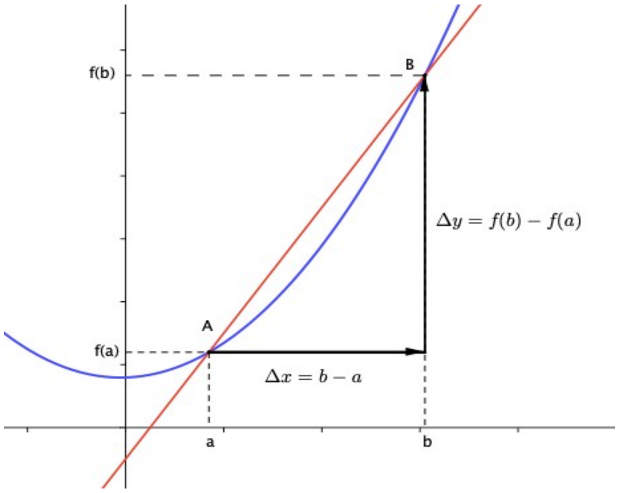
Chapitre 3 : Dérivation point de vue local

I- Taux de variation et nombre dérivé

a) Taux de variation d'une fonction

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I
Le taux de variation (ou **taux d'accroissement)** de f entre a et b est le nombre réel égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interprétation géométrique

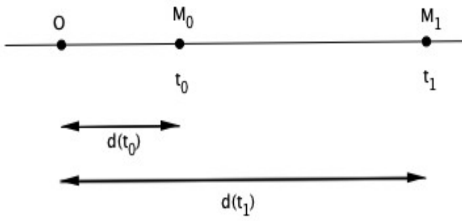


Soit A (a ; f(a)) et B (b ; f(b)) deux points de la courbe représentative de f.
Le taux de variation de f entre a et b correspond au coefficient directeur de la droite (AB)

En effet : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Interprétation cinématique

Etant donné un mobile M se déplaçant sur un axe (O ; $\vec{i}$) on repère la position de ce mobile à l'instant t par la distance d(t) entre ce point et l'origine O.
Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et t_1 est égal à la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t_1



b) Nombre dérivé

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que a+h ∈ I . Dire que la fonction **f est dérivable en a** signifie que le taux de variation de f entre les nombres a et a + h se rapproche d'un nombre réel L lorsque h se rapproche de zéro.
Ce réel L **limite du taux de variation** lorsque h se rapproche de zéro est appelé **nombre dérivé de f en a** .

On le note $f'(a)$ et on a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

ORAL : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit « limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »

Interprétation cinématique

On a vu que le taux de variation de d entre t_0 et t_1 correspondait à la vitesse moyenne du mobile . Pour $t_1 = t_0 + h$, si ce taux de variation admet une limite quand h tend vers 0, la fonction d est dérivable en t_0 et le nombre dérivé $d'(t_0)$ correspond alors à la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0

c) Calcul d'un nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $3x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer le taux de variation T(h) de f entre 2 et 2 + h
2. Déterminer la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 et en déduire que la fonction f est dérivable en 2 et préciser $f'(2)$
3. Retrouver la valeur de $f'(2)$ à l'aide de la calculatrice

1. $T(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 4(2+h) + 1$
$= 3(4 + 4h + h^2) - 8 - 4h + 1$
$= 12 + 12h + 3h^2 - 8 - 4h + 1$
$= 3h^2 + 8h + 5$

$f(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 5$

On a donc

$$T(h) = \frac{3h^2 + 8h}{h} = \frac{h(3h+8)}{h} = 3h + 8$$

2. $\lim_{h \to 0} T(h) = \lim_{h \to 0} 3h + 8 = 8$

Comme cette limite existe, f est dérivable en 2 et on a $f'(2) = 8$

3. A la calculatrice , on suit l'affichage après avoir entré :

- pour casio, OPTN CALC d/dx
- pour TI , math 8.nbreDerive

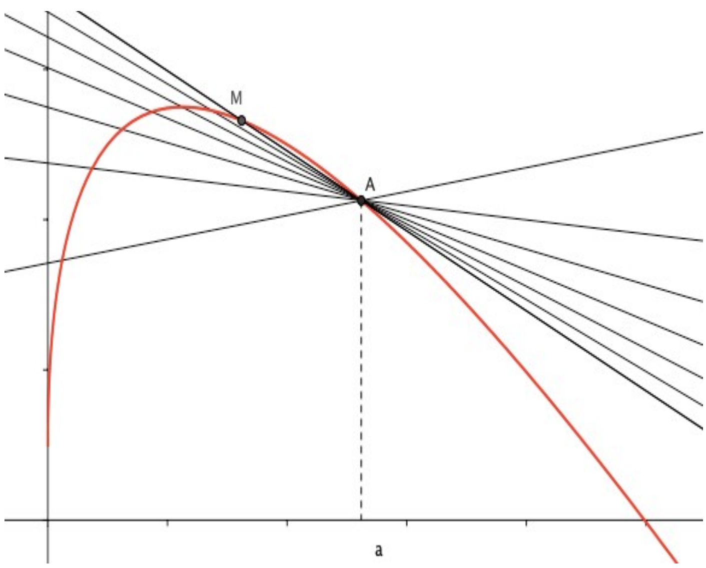
II- Interprétation géométrique du nombre dérivé : Tangente à une courbe en un point donné

a) Notion de tangente

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a. On considère le point A (a ; f(a)) et le point M (a + h , f(a +h)).

La droite (AM) est une sécante à la courbe C et a pour coefficient directeur le taux de variation de la fonction f entre a et a + h :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = T(h)$$



Lorsque le point M décrit la courbe C (avec $M \neq A$) on obtient donc un **faisceau de sécantes** à la courbe C

Puisque f est dérivable en a , on a $\lim_{h \to 0} T(h) = f\,'(a)$

La droite T passant par A de coefficient directeur $f\,'(a)$ se conçoit comme **la position limite de ces sécantes** lorsque M se rapproche de A . Cette droite est appelée la t**angente à la courbe C au point d'abscisse a**

Définition : Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe C au point $A(a;f\,(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f\,'(a)$

Une remarque importante : Il existe une catégorie de tangente visible assez facilement sur une courbe : les tangentes horizontales. Elles se caractérisent par un coefficient directeur nul c'est à dire $f'(a) = 0$

b) Equation réduite de la tangente

Propriété Soit f une fonction définie sur un intervalle et dérivable en un réel a de cet intervalle.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point (a ; f(a)) est :

$$y = f\,'(a)\,(x - a) + f(a)$$

Démonstration

III- Fonction dérivée

a) Fonction dérivée

Définition On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel a de I. On appelle alors fonction dérivée de f noté f' la fonction qui à tout réel x de I associe $f'(x)$

Un premier tableau de fonction dérivée à connaître (vu en activité)

Fonction	La fonction f définie par	...est dérivable pour tout réel x appartenant à ...	... de fonction dérivée $f'(x)$ égal à ...
Constante	f(x) = k avec k constante	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
Identité	f(x) = x	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
Affine	f(x) = mx + p avec m et p constantes réelles	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$
Carré	f(x) = x^2	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
Cube	f(x) = x^3	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
Inverse	f(x) = $\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	f(x) = $\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Un cas de non dérivabilité

La fonction racine carrée est définie en 0 et pourtant elle n'est pas dérivable en 0. En effet le calcul du taux de variation entre 0 et 0+h donne :

$$T(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Or lorsque h se rapproche de 0, le réel $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs arbitrairement grandes. On dit que la limite de T(h) dans un tel cas est $+\infty$.
Cette limite n'étant pas finie, la fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.