PROBABILITES

I- Probabilités élémentaires

a) Vocabulaire des probabilités

- L'**intersection** de deux événements A et B est l'ensemble formé des éventualités **communes** aux deux événements . Il est notée $A \cap B$
- **La réunion** de deux événements A et B est l'ensemble formé de **toutes** les éventualités des deux événements. Il est notée notée $A \cup B$
- Lorsque deux événements ont une intersection vide ($A \cap B = \emptyset$) , on dit qu'ils sont **incompatibles** ou **disjoints**
- On appelle événement contraire d'un événement A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de toutes les éventualités qui ne sont pas dans A. C'est la partie **complémentaire** de A dans Ω c'est à dire $\overline{A} \cup A = \Omega$

b) Loi de probabilité sur un univers

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire composé des événements élémentaires $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;1]$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Propriétés :

1) La probabilité de la réunion de deux événements est donnée par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2) Si deux événements sont **incompatibles**, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités : Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) La probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de A est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

II- Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit Ω l'ensemble sur lequel est définie une probabilité P (c'est l'univers)
Soit A et B deux événements de Ω.

Définition :
Si $P(B) \neq 0$, la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé se note $P_B(A)$ et est définie par le quotient $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On a donc $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Cette **probabilité est dite conditionnelle.** On définit de même : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Propriété : Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$P(A \cap B) =$ ou $P(A \cap B) =$

2) Propriétés

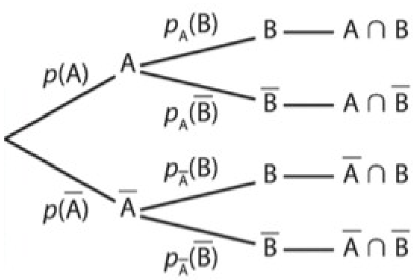
• Pour tout événement A: $0 \leq P_B(A) \leq 1$	• $P_B(A)+P_B(\overline{A})=1$
Démonstration	Démonstration

3) Arbre pondéré et calculs de probabilité

Un arbre pondéré ou arbre de probabilité est un schéma mettant en jeu des probabilités conditionnelles permettant de calculer rapidement des probabilités

A noter quelques propriétés :

- La somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1
- Si on suit une branche de l'arbre on est en présence de l'intersection des événements correspondants. Le calcul de la probabilité de l'intersection est alors le produit des probabilités indiquées le long des branches



$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple

Dans un lycée, les élèves de Terminale faisant spécialité mathématiques, se répartissent ainsi :

- 65 % de filles dont 24 % souhaitant faire PASS
- 35 % de garçons dont 17 % souhaitent faire PASS

On tire au sort un élève et on considère les événements F : « l'élève est une Fille » et A : « l'élève souhaite faire PASS »

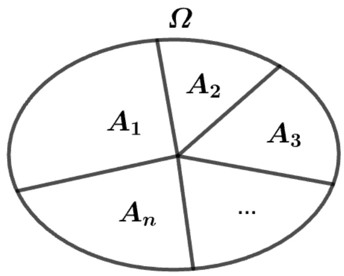
a) Illustrer la situation à l'aide d'un arbre

b) Calculer la probabilité que l'élève tiré au sort soit une fille souhaitant faire PASS a)

b)

III- Formule des probabilités totales

Définition
On considère n événements A_1 , A_2 , ... , A_n d'un univers Ω de probabilités non nulles .
Ces événements forment **une partition** de l'univers lorsqu'ils sont deux à deux **incompatibles** et lorsque $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$



Dans l'arbre précédent , les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers

Propriété : formule des probabilités totales
Soit (A_1 , A_2 , ... , A_n) une famille d'événements formant une **partition de l'univers**. La probabilité d'un événement B quelconque de l'univers est alors donnée par :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots P(A_n \cap B)$$

Exemple Dans l'exemple précédent, si on souhaite connaître la probabilité de A « l'élève souhaite faire PASS » on constate sur l'arbre que **deux chemins mènent à A** . C'est dans un tel cas que l'on pense à la formule des probabilités totales car F et $\overline{F}$ formant une partition de l'univers d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(A) = P(F \cap A) + P(\overline{F} \cap A)$

=

=

=