Chapitre 1 : Les Polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré.

Capacités attendues

- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

I) Fonction polynôme du second degré

a) Définition

Définition Un polynôme (ou trinôme) du second degré est une fonction P, **définie sur ℝ** par **P(x) =** $\mathbf{ax^2+bx+c}$ où a , b et c sont des réels **avec a ≠ 0.**
L'expression ax^2+bx+c est la forme **développée** du **trinôme**

Définition On appelle **racine d'un polynôme P** tout nombre réel x_1 tel que $P(x_1)=0$
Autrement dit, une racine de P est une solution de l'équation P(x) = 0

- ✗ La fonction P définie par P(x) = $(2x-1)(x+2)$ est un polynôme du second dégré . En effet, la forme développée de P est P(x) = $2x^2+4x-x-2$ = $2x^2+3x-2$.
- ✗ Les coefficients de P sont a = 2 , b = 3 et c = -2
- ✗ -2 et $\frac{1}{2}$ sont des racines de P : $P(x)=0$ ⇔ $(2x-1)(x+2)=0$ ⇔ $x=\frac{1}{2}$ ou x = -2

b) Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété Soit P un polynôme défini par P(x) = $\boldsymbol{a}x^2+bx+c$ avec a ≠ 0.
Si x_1 est une racine de P alors P peut se factoriser par $x-x_1$ sous la forme P(x) = $(x-x_1)(\boldsymbol{a}x+d)$ où d est un réel

- ✗ Si P admet deux racines x_1 et x_2 il peut donc se factoriser par $(x-x_1)(x-x_2)$
Ainsi, un polynôme admet au plus deux racines et on a la propriété suivante :

Propriété Soit P un polynôme défini par P(x) = $\boldsymbol{a}x^2+bx+c$ avec a ≠ 0.
Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors P peut s'écrire sous forme factorisée P(x) = $a(x-x_1)(x-x_2)$

- ✗ Soit P(x) = $2x^2-6x+4$. On a : P(1) = $2\times1^2-6\times1+4$ = 0 et P(2) = $2\times2^2-6\times2+4$ = 0 .
Ainsi, 1 et 2 sont des racines de P d'où P peut s'écrire P(x) = $2(x-1)(x-2)$

c) Somme et produit des racines

Propriété	Soit P un polynôme défini par P(x) = ax^2+bx+c avec a ≠ 0. Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors • la somme des racines est : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ • le produit des racines est : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

Démonstration :

P admet deux racines x_1 et x_2 donc P s'écrit $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

En développant , il vient : P(x) = $a(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2)$

$= ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

Or P(x) = ax^2+bx+c donc par identification des coefficients, il vient : $-a(x_1+x_2)=b$ et $ax_1x_2=c$

et comme a ≠ 0 , on obtient : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$

II- Forme canonique

Propriété	Soit P une fonction polynôme du second degré définie par f(x) = ax^2+bx+c Il existe deux réels α et β tel que P(x) = $a(x-\alpha)^2+\beta$ Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f

Démonstration Transformation de l'écriture ax² + bx + c avec a ≠ 0

ax² + bx + c = $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c = a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$

$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c = \boldsymbol{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}$

En notant Δ = b^2-4ac , il vient : P(x) = $\boldsymbol{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}}$.

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$, il vient : P(x) = $a(x-\alpha)^2+\beta$

✗ **Dans la pratique, on peut retenir les formules de α et β précédentes. Ainsi :**

Soit P(x) = x^2+4x-6 on a donc $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times(-6)$ = 40

d'où $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times1} = -2$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40}{4\times1} = -10$

on a alors : **P(x) = $\boldsymbol{1(x+2)^2-10}$**

✗ **On peut aussi utiliser la méthode de la démonstration qui repose sur l'égalité suivante :**

$$\boxed{x^2+2ax=(x+a)^2-a^2}$$

P(x) = $2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x)+9 = 2((x-2)^2-4)+9 = 2(x-2)^2+1$

Le nombre Δ = b^2-4ac s'appelle l**e discriminant du trinôme** ax^2+bx+c Il est noté Δ

III- Equation du second degré

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

Théorème On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$

1. Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
2. Si $\Delta=0$ alors l'équation admet une solution dite **double**, $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
3. Si $\Delta>0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration :

La forme canonique vue précédemment permet de dire que résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}=0$ qui s'écrit encore puisque $a\neq 0$: $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

On a alors **selon le signe de Δ** :

Si $\Delta<0$ alors $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est strictement négatif ce qui est impossible car c'est un carré	Si $\Delta=0$ alors $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ ce qui revient à $x+\dfrac{b}{2a}=0$ et une solution $x=-\dfrac{b}{2a}$	Si $\Delta>0$ alors $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ c'est à dire $x=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarques

- les réciproques des propriétés précédentes sont vraies
- les formules obtenues pour $\Delta>0$ s'étendent à $\Delta=0$
- **inutile d'utiliser le Δ pour un trinôme incomplet**

  Exemple $x^2-4x=0$ revient à $x(x-4)=0$ d'où $S=\{0\ ;\ 4\}$

Propriété Factorisation de P(x) = ax^2+bx+c suivant le signe de Δ

1. Si $\Delta<0$: P(x) ne peut pas se factoriser
2. Si $\Delta=0$: P(x) = $a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine de P
3. Si $\Delta>0$: P(x) = $a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de P