Chapitre 1 : Les Polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration

- Résolution de l'équation du second degré.

Approfondissements possibles

- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- Factorisation de x^n-1 par $x-1$, de x^n-a^n par x - a.
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2-sx+p$.

I) Fonction polynôme du second degré

a) Définition

Définition : Un polynôme du second degré est une fonction P, **définie sur ℝ** , pouvant se ramener à la forme :

P(x) = $\mathbf{ax^2+bx+c}$ où a , b et c sont de réels **avec a ≠ 0**

L'expression ax^2+bx+c est encore appelée **trinôme du second degré**

Exemple :

P(x) = $2x^2+3x+4$ (a = , b = et c =) .

P(x) = $7x^2-1$ (a = 7 , b = 0 , c = -1)

Contre exemple :

P(x) = 2x – 1 est un binôme du premier degré

P(x) = $(x-1)^3$ est du troisième degré

P(x) = $(x-1)^2-x^2 = x^2-2x+1-x^2=-2x+1$ est du premier degré

P(x) = $\dfrac{x^3-2x^2+3x}{x} = x^2-2x+3$ n'est pas un polynôme du second degré car

b) Racine d'un polynôme du second degré

Définition 2 :

On appelle **racine d'un polynôme P** toute valeur de la variable x solution de l'équation $P(x) = 0$

Exemple :

$P(x) = 2x^2 - 4x - 6$ admet pour racine 3 car $P(3) =$

c) Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ notons C la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Théorème Résultat étudié en classe de seconde

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole

Elle est **tournée vers le haut** si $a > 0$, **tournée vers le bas** si $a < 0$

Son **axe de symétrie** est la droite d'équation : $x = -\frac{b}{2a}$

Son **sommet S** a pour coordonnées $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Remarque : Les coordonnées α et β du sommet de la parabole donnent de la forme canonique du polynôme :

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

On peut ainsi dresser le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré :

Soit $f(x) = ax^2+bx+c$

cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$

cas $a < 0$

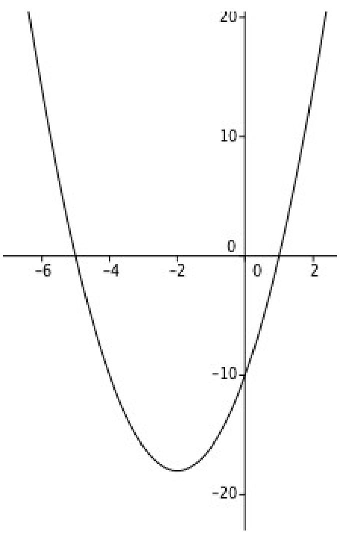
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

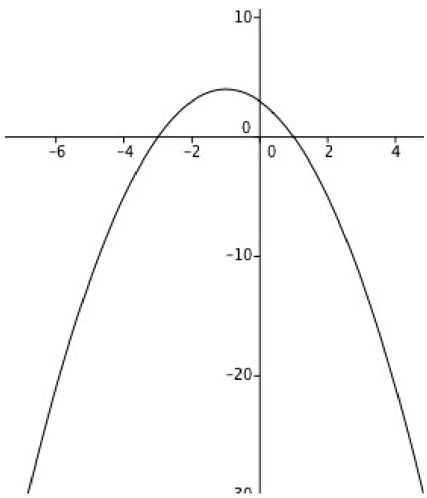
f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$

Exemples : Pour les deux paraboles suivantes, donner les coordonnées des sommets ainsi que la forme canonique

1) $f(x) = 2x^2+8x-10$

2) $(x) = -x^2 - 2x + 3$





II- Résolution de l'équation du second degré ax² + bx + c = 0

a) Forme canonique

On a vu en activité qu'un polynôme du second degré peut s'écrire sous forme canonique. Généralisons ce résultat :

Cas général : Transformation de l'écriture $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

On pose alors $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant** du polynôme et on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Théorème : Tout polynôme du second degré peut s'écrire de **manière unique sous** la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$. Cette forme s'appelle la **forme canonique** du trinôme

Exemple : f(x) = $2x^2 - 4x + 8$

- On peut calculer α et β :

  $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$ et $\beta = f(1) = 2 - 4 + 8 = 6$ d'où f(x) = $2(x-1)^2 + 6$
- ou dans des cas simples :

  f(x) = $2(x^2 - 2x + 4) = 2((x-1)^2 - 1 + 4) = 2((x-1)^2 + 3) = 2(x-1)^2 + 6$

b) L'équation ax² + bx + c = 0

La forme canonique vue précédemment permet de dire que résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ qui s'écrit encore puisque $a \neq 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. On a alors selon le signe de Δ :

Si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est strictement négatif ce qui est impossible car c'est un carré	Si $\Delta = 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ ce qui revient à $x + \frac{b}{2a} = 0$ et une solution $x = -\frac{b}{2a}$	Si $\Delta > 0$ alors $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ c'est à dire $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème : Solution(s) éventuelle(s) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution dite double, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
3. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarques :

- les réciproques des propriétés précédentes sont vraies
- les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta = 0$
- **inutile d'utiliser le Δ pour un trinôme incomplet**

  Exemple : $x^2 - 4x = 0$ revient à $x(x - 4) = 0$ d'où S = {0 ; 4 }

III- Propriété des racines

a) Somme et produit des racines

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie par f(x) = ax^2+bx+c dont le discriminant est strictement positif . Les deux racines distinctes x_1 et x_2 de f vérifient alors : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

Remarque : la propriété fonctionne encore pour un discriminant égal à zéro

L'équation $2x^2-x-1=0$ admet une racine évidente 1. On peut trouver facilement l'autre en utilisant la règle du produit $x_1\times x_2=1\times x_2=\frac{-1}{2}$ qui donne $x_2=-\frac{1}{2}$

Démonstration : Voir cahier d'exercice

Conséquence : Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+p=0$

Démonstration

- Soit x_1 et x_2 de somme S et de produit P. On a S = x_1+x_2 donc $x_1=S-x_2$ et comme $P=x_1\times x_2$ cela donne $P=(S-x_2)x_2$ qui donne après développement $x_2^2-Sx_2+P=0$. x_2 est donc solution de l'équation proposée. La démonstration est la même pour x_1
- Réciproquement Si x_1 et x_2 sont deux réels solutions de $x^2-Sx+P=0$ la propriété précédente donne $x_1+x_2=-\frac{-S}{1}=S$ et $x_1\times x_2=\frac{P}{1}=P$

b) Factorisation d'un trinôme

Le résultat suivant découle de la transformation d'écriture précédente

Théorème : Le trinôme ax^2+bx+c se factorise ainsi :

1. Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme
2. Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
3. Si $\Delta<0$, le trinôme ax^2+bx+c n'est pas factorisable

Démonstration : On part de la forme canonique

c) <u>Signe du trinôme</u>

Etudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

<u>Cas $\Delta > 0$</u> 2 racines réelles distinctes x_1 et x_2 (supposons $x_1 < x_2$) et on peut écrire : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

<u>Cas $\Delta = 0$:</u> on utilise la forme canonique :

<u>Cas $\Delta < 0$</u>

<u>Théorème :</u> Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent