Chapitre 10 : Produit scalaire

I- Les formes du produit scalaire

1) Le produit scalaire dans un repère

Définition

On se place dans un repère **orthonormé** du plan. Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple : Avec $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(2;3)$ on obtient : $\vec{u}\cdot\vec{v} =$

Une première conséquence

De part la définition, le produit scalaire est symétrique c'est à dire $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2) Le produit scalaire avec des normes

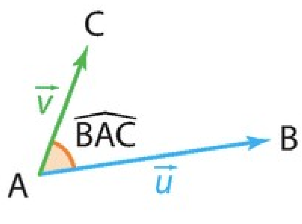
Propriété Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

3) Le produit scalaire avec un cosinus

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs .

- En notant ($\vec{u}$; $\vec{v}$) , l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
- Si $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$, le produit scalaire s'écrit : $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$



4) Le cas particulier des vecteurs colinéaires

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de **même sens** , $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de **sens contraire** , $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\ \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Démonstration : On utilise la forme du produit scalaire avec le cosinus.

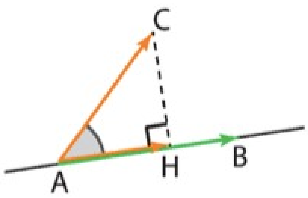
On a donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$

- Si les vecteurs sont colinéaires de même sens alors l'angle $(\vec{u};\vec{v}) = 0$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 1$
- Si les vecteurs sont colinéaires de sens contraires alors l'angle $(\vec{u};\vec{v}) = \pi$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -1$

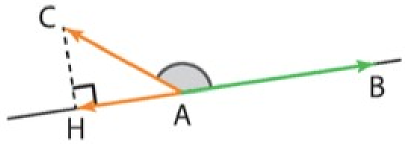
5) Le produit scalaire par projection orthogonale

Soient A , B et C trois points quelconque du plan. Sur les deux figures suivantes, le point H est appelé projeté orthogonal de C sur (AB).

Cas 1



Cas 2



Si on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

- Dans le cas 1 , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens donc $\widehat{BAC} =$ ....

  D'où en appliquant les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle ACH, il vient

  $$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\dots}{\dots}$$

  On obtient alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

- Das le cas 2 , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire donc $\widehat{BAC} = \pi - \dots$

  D'où en appliquant les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle ACH, il vient

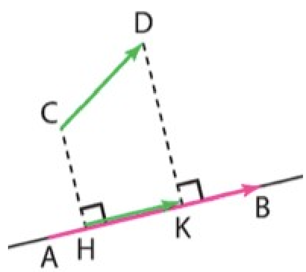
  $$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\pi - \dots) = \frac{\dots}{\dots}$$

  On obtient alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

Propriété Soit A , B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a alors :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires

A noter : Dans le cas général, pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, on peut projeter les points C et D sur la droite (AB) on a alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$.
On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{HK}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$



II- Autres Propriétés du produit scalaire

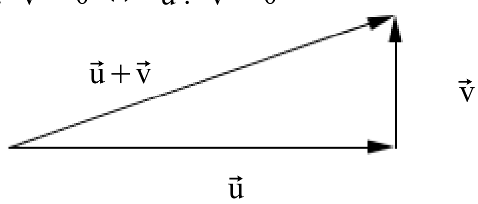
1) Orthogonalité

Propriété Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul

$$\vec{u} \text{ orthogonal à } \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Démonstration : d'après le théorème de Pythagore, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \underset{\text{des normes}}{\overset{\text{formule}}{\iff}} 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$



2) Propriétés algébriques du produit scalaire

Théorème 3 Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan et tout réel k, on a les égalités suivantes :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie)
2) $(k\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\,\vec{v}) = k\;\vec{u}\cdot\vec{v}$
3) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
4) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
5) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
6) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration :

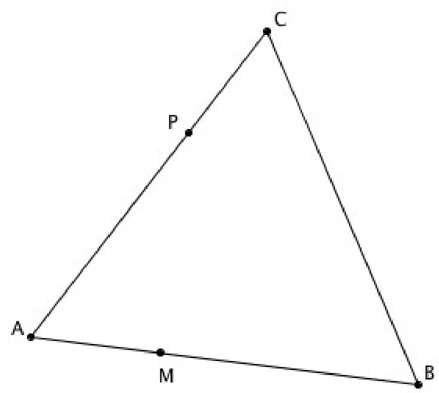
Toutes ces relations se démontrent facilement en utilisant la définition du produit scalaire

Exemple avec le 5) :

$\vec{u} - \vec{v}\ (x-x';y-y')$ d'où $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (x-x')^2+(y-y')^2 = x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2$ `

$$= x^2+y^2-2(xx'+yy')+x'^2+y'^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

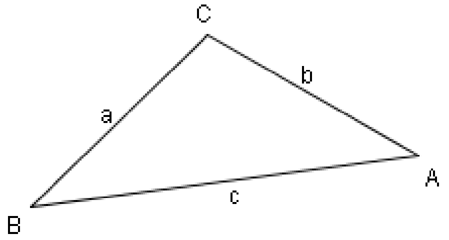
Application: Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit M et P deux points respectivement sur [AB] et [AC] tel que AM = CP = $\frac{a}{3}$. Démontrer que le triangle AMP est rectangle.



3) Formule d'Al-Kashi

En utilisant les notations du théorème d'Al-Kashi dans un triangle ABC , on a :

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\hat{B})$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\hat{C})$



Démonstration faite dans le cahier d'exercices

4) Etude d'un ensemble de points

Théorème de la médiane
Soit A et B deux points du plan. On appelle I le milieu du segment [AB].
On a alors pour tout point M du plan la relation suivante :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-IA^2 = MI^2-\frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration

Application Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Si on appelle I le milieu de [AB], d'après le théorème de la médiane, on a : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-IA^2$ d'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ devient $MI^2=IA^2$ c'est à dire $MI=IA$. M est donc sur le cercle de centre I et de rayon IA c'est à dire le cercle de diamètre [AB]

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB]