Question de cours en terminale S

Préambule

Préambule

Les démonstrations au BAC ou ROC (Restitution Organisée de Connaissances) sont fréquentes dans les sujets. Vous trouverez dans ce fichier les démonstrations présentes dans le B.O. (Bulletin Officiel) . Cette liste n'est pas exhaustive c'est à dire qu'il peut vous être demandé d'autres preuves du cours mais vous avez ici l'essentiel. N'hésitez donc pas à vous entrainer à refaire ces démonstrations.

A noter que si votre projet est d'aller en classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs l'année prochaine, vous aurez alors **chaque semaine** une interrogation individuelle d'une heure (les colles) où vous devrez refaire l'une des démonstrations du cours de la semaine

I- Suites numériques

S1 Deux Sommes à connaître

1. Pour tout n ∈ ℕ, $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2. Pour tout n ∈ ℕ et pour tout $q\neq 1$, $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

1. Soit S = $1+2+3+\ldots+n$.
   L'astuce consiste à écrire cette somme « à l'envers » :
   $$S=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$
   $$S=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$
   On effectue alors la somme de ces deux égalités :
   $$S+S = [1+n]+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\ldots+[(n-2)+3]+[(n-1)+2]+[n+1]$$
   $$2S = [n+1]+[n+1]+[n+1]+\ldots+[n+1]+[n+1]+[n+1]$$
   $2S=n(n+1)$ d'où S = $\frac{n(n+1)}{2}$

2. Soit $S=1+q+q^2+\ldots+q^n$
   On calcule $q\times S$. On a donc : $S = 1+q+q^2+\ldots+q^n$
   $qS = q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1}$
   On soustrait alors les deux égalités :
   $$S-qS=(1+q+q^2+\ldots+q^n)-(q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1})$$
   $$S(1-q)=1-q^{n+1}$$
   $$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

S2 Inégalité de Bernoulli

Pour tout n ∈ ℕ et pour tout a ∈ [0;+∞[$(1+a)^n \geq 1+na$

Une démonstration qui se fait par récurrence :

Initialisation : pour n = 0, $(1+a)^0=1$ et $1+0a=1$ donc $(1+a)^0 \geq 1+0a$
La relation est vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $(1+a)^n \geq 1+na$ et démontrons que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

$(1+a)^n \geq 1+na$ (1)

Comme $1+a>0$, on peut multiplier (1) par 1+a sans changer l'ordre :

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$$

D'où comme $na^2 \geq 0$, on $a: 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ d'où

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

Conclusion : Si la relation est vraie au rang n, alors elle l'est au rang n+1 or la relation est vraie au rang 0 donc par hérédité elle est vraie pour tout n ≥ 0

A noter en bleu la rédaction d'une démonstration par récurrence

S3 Théorème de comparaison

Soit deux suites (u_n) et (v_n) . On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq v_n$

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Il est nécessaire de connaître la définition de la limite d'une suite en +∞ : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors tout intervalle de la forme [A;+∞[contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang

On sait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc tout intervalle de la forme [A;+∞[contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang c'est à dire :

pour tout n ≥ n_0 , $v_n \geq$ A
or $u_n \geq v_n$ donc :
pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq$ A
Ainsi tout intervalle de la forme [A;+∞[contient tous les valeurs de u_n à partir de n_0 donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

S4 Limites d'une suite géométrique

Soit q un réel. Si q > 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Cette démonstration nécessite en pré-requis l'inégalité de Bernoulli et le théorème de comparaison en +∞

Démonstration

Comme q > 1 , il existe a > 0 tel que q = 1 + a . D'après l'inégalité de Bernoulli, on a donc :

pour tout n ∈ ℕ , $(1+a)^n \geq 1+na$ c'est à dire

$$q^n \geq 1+na$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$, d'après le théorème de comparaison , on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

S5 Suite Croissante

1. Si (u_n) est une suite croissante convergent vers un réel L alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L
2. Si (u_n) une suite croissante non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Pour 1, il est nécessaire de connaître la définition de la limite d'une suite convergente
Pour 2, il est nécessaire de connaître la définition de la limite d'une suite en +∞

Démonstration :

1. Raisonnons par l'absurde

   Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > L$

   L'intervalle I = $]L-1 \,;\, u_{n_0}[$ est un intervalle contenant L . D'où comme la suite converge vers L, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I mais la suite (u_n) est croissante donc

   pour $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ d'où $u_n \notin I$

   Il est donc impossible que I contienne tous les termes de la suite à partir d'un certain rang . L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite est majorée par

2. Soit (U_n) une suite croissante et non majorée.
   Si une suite est majorée, il existe un réel M ∈ ℝ , tel pour tout n ∈ ℕ , $U_n \leq M$
   Ainsi la suite n'étant pas majorée, pour tout M ∈ ℝ , il existe n ∈ ℕ tel que $U_n > M$

   A noter :
   Le contraire de « il existe » est « quelque soit » et vice versa

   Cependant, la suite étant croissante, pour tout p > n, on a $U_p > U_n$ ainsi $U_p > M$
   On a donc prouvé que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle]M ;+∞[à partir d'un certain rang d'où le résultat

II- Fonctions

F1 : Unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable sur ℝ telle que $\begin{cases} f'=f \\ f(0)=1 \end{cases}$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle notée exp

Démonstration :

Soit f une fonction vérifiant $\begin{cases} f'=f \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) On commence par démontrer que la fonction exponentielle ne s'annule pas .

Soit k la fonction définie sur ℝ par $k(x)=f(x)\times f(-x)$

k est un produit de fonctions dérivables sur ℝ donc k est dérivable sur ℝ et on a :

$k'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times(-f'(-x))$ Or f = f' donc

$k'(x)=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)$ = 0

La fonction k est donc une fonction constante c'est à dire que pour tout x ∈ ℝ , k(x) = c

or $k(0)=f(0)\times f(-0)=1$ donc c = 1

On a donc pour tout x ∈ ℝ , $k(x)=f(x)f(-x)=1$ donc f ne peut s'annuler

2) On suppose alors qu'il existe une fonction g distincte de f qui vérifie $\begin{cases} g'=g \\ g(0)=1 \end{cases}$.

Comme f est non nulle pour tout x, soit h la fonction définie sur ℝ par $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$

h est dérivable sur ℝ comme quotient de fonctions dérivables avec le dénominateur non nul et on a :

$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^2}$ et comme f = f' et g = g' , on en déduit que $h'(x)=0$ d'où h est constante et

comme $h(0)=\frac{g(0)}{f(0)}$ = 1 , pour tout x ∈ ℝ , h(x) = 1 cad $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ d'où $g(x)=f(x)$.

La fonction f est donc unique

F2 Des limites à connaître

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

<u>Pré-requis :</u> *on utilise le théorème de comparaison sur les limites de fonctions*

<u>Démonstration 1 et 2</u>

On commence par étudier la fonction f définie par f(x) = $e^x - x$. Elle est dérivable sur ℝ et on a : $f'(x)=e^x-1$

Or pour tout x ≥ 0, $e^x \geq 1$ d'où $f'(x)\geq 0$ et f est croissante

pour tout x ≤ 0, $e^x \leq 1$ d'où $f'(x)\leq 0$ et f décroissante

Ainsi la fonction f admet un minimum en x = 0 qui vaut 1 d'où pour tout x ∈ ℝ , f(x) ≥ 0 c'est à dire $e^x \geq x$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc d'après le trhéorème de comparaison sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Pour -∞, on effectue un changement de variable X = $-x$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ car } \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$$

<u>Démonstration 3 et 4</u>

On étudie la fonction $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$ dérivable sur ℝ avec $g'(x)=e^x-x > 0$ d'après l'étude précédente d'où g est croissante et pour tout x > 0 , on a donc g(x) > g(0) cad $e^x > \frac{x^2}{2}$ d'où en divisant par x (>0), on obtient : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

On termine alors par le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Pour -∞ ; on effectue un changement de variable X = -x :

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = \lim_{X\to+\infty} -X e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$

<u>Démonstration du 5</u>

On revient ici à la définiton du nombre dérivé

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = (\exp(0))' = \exp(0) = 1$$

F3 Relation fonctionnelle de l'exponentielle et du logarithme népérien

1. pour tous réels a et b , on a : $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$
2. pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

Démonstration

1) On utilise la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $\dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$ et on démontre qu'il s'agit de la fonction exponentielle

f est dérivable sur ℝ et on a : $f'(x)=\dfrac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = f(x)$

Ainsi f est une fonction égale à sa dérivée et comme $f(0)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(a)}$ = 1 il s'agit de la fonction exponentielle car c'est la

seule qui vérifie $\begin{cases} f = f' \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On a donc pour tout réel x, $\exp(x)=\dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$ c'est à dire $\exp(a)\exp(x)=\exp(x+a)$

2) pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$e^{\ln(ab)}=ab \quad \text{et} \quad e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$$

On en déduit que $e^{\ln(ab)}=e^{\ln a+\ln b}$.

Or on sait que $e^{A}=e^{B} \Leftrightarrow A=B$ d'où $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

F4 D'autres limites à connaître

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Les deux premières limites sont à connaître mais non exigibles ('normalement')

Démonstration 3 et 4

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En effectuant le changement de variable X = ln x , on a alors $e^X=x$ d'où il vient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^X}{X}}$. Or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour la deuxième limite, on effectue le changement de variable X = $\dfrac{1}{x}$ d'où $\dfrac{1}{X}=x$ et on a :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

Démonstration 5

On revient à la définition du nombre dérivé

Soit f(x) = ln(1+x) . f est dérivable dès que 1+x>0 cad x>–1 et on a $f'(x)=\frac{1}{x+1}$

f est donc dérivable en 0 et donc :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ c'est à dire : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ = 1

F5 Intégration

Soit f une fonction continue et positive sur [a;b].

La fonction F définie sur [a;b] par F(x) = $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur [a;b] et sa dérivée est f

Démonstration

On démontre ce théorème dans le cas où f est croissante (on admet le cas général)

Pour cette démonstration, on revient à la définition du nombre dérivé en cherchant à calculer la limite suivante :

$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}$ dans le cas où h est positif

$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x) \overset{figure\,1}{=} \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \overset{figure\,2}{=} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

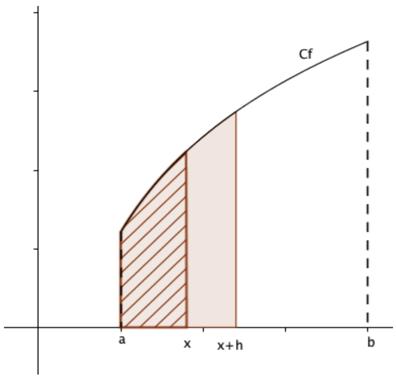


figure 1

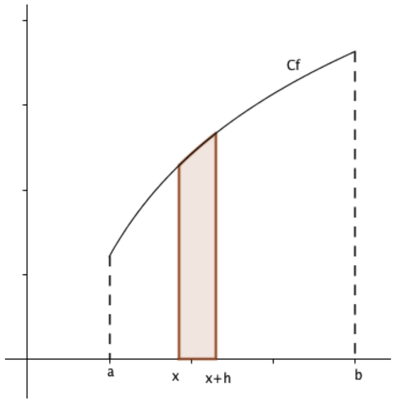


figure 2

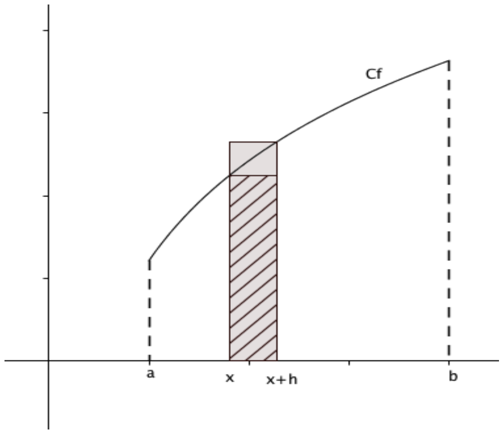


figure 3

La fonction f étant croissante sur $[a;b]$, pour tout t ∈ $[x;x+h]$, on a : $f(x)\leq f(t)\leq f(x+h)$ ainsi l'aire de la figure 2 est comprise entre l'aire du rectangle hachurée (figure 3) et le grand rectangle c'est à dire

$h\times f(x)\leq \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)\leq h\times f(x+h)$ d'où comme h > 0 , on a :

$$f(x)\leq\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}\leq f(x+h)$$

On applique alors le théorème des gendarmes pour obtenir : $\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}$ = f(x)

Comme cette limite existe pour tout x ∈ [a;b], la fonction F est dérivable sur [a;b] et on a $\mathrm{F}'(x)=f(x)$

F6 Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle

Démonstration : On démontre ce résultat dans le cas d'une fonction f continue sur un intervalle I et admettant un minimum m sur cet intervalle . On pose alors la fonction g définie par $g(x)=f(x)-m$. La fonction g étant continue et positive sur I, on en déduit que la fonction G définie par G(x) = $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de g sur I

Considérons alors la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+mx$

Cette fonction est dérivable sur I comme somme de fonction dérivable sur I et on a :

$$\mathrm{F}'(x)=\mathrm{G}'(x)+m$$
$$\mathrm{F}'(x)=g(x)-m+m$$
$$\mathrm{F}'(x)=f(x)$$

On a ainsi trouvé une primitive F à la fonction f

A noter que la fonction $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **la** primitive de f qui s'annule en a

III- Les Nombres Complexes

C1 Propriétés des conjugués

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
2. $\overline{-z}=-\overline{z}$
3. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
4. $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ pour n entier naturel non nul
5. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z'\neq 0$

Démonstration 1 , 2 , 3 , 5

On démontre 1 , 2 , 3 et 5 sur la même idée. Exemple avec le 3.

Soit z = $a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$

$\mathrm{ZZ}'=(a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b')$ = ... = $aa'-bb'+\mathrm{i}(ab'+a'b)$ donc $\overline{\mathrm{ZZ}'}$ = $aa'-bb'-\mathrm{i}(ab'+a'b)$

$\overline{\mathrm{Z}}\times\overline{\mathrm{Z}'}$ = $(a-\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b')$ = $aa'-\mathrm{i}ab'-\mathrm{i}a'b-bb'$ = $aa'-bb'-\mathrm{i}(ab'+a'b)$

D'où l'égalité

Démonstration 4

Pré-requis : *On connait la formule du produit*

On effectue un raisonnement par récurrence

Initialisation n = 1 evident

Supposons qu'il existe n tel que $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ et démontrons que $\overline{z^{n+1}}=\overline{z}^{n+1}$

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n\times z} = \overline{z^n}\times\overline{z} = \overline{z}^n\times\overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

Conclusion : Si la relation est vraie au rang n alors elle l'est au rang n+1 Or la relation est vraie au rang 1 donc par hérédité elle l'est pour tout n ≥ 1

C2 Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes z et z' :

1. $z \times \bar{z} = |z|^2$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
4. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. $|z^n| = |z|^n$ pour n entier naturel non nul

Les démonstrations se font sur le même principe que pour les conjugués.

Démonstration du 1

z = a+ib donc $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $z \times \bar{z}$ = $(a+ib)(a-ib)$ = $a^2 - (ib)^2$ = $a^2 + b^2$ d'où la réponse

C3 Propriétés des arguments

Pour tous nombres complexes z et z' :

1. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$
2. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$
3. $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad (2\pi)$
4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ = $\arg(z) - \arg(z')$

Pré-requis : On utilise ici les formules d'addition du sinus et du cosinus

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration 1

Si arg(z) = θ et si r est le module de z on a la forme trigonométrique de z qui est : z = r (cos θ + i sin θ). On a alors $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$. Comme $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, on peut écrire le forme trigonométrique de $\bar{z}$ qui est alors $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ d'où $\arg(\bar{z}) = -\theta$

Démonstration 2

$zz' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ = $rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$

d'où d'après les formules d'addition, on obtient la forme trigonométrique de zz' :

$$zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

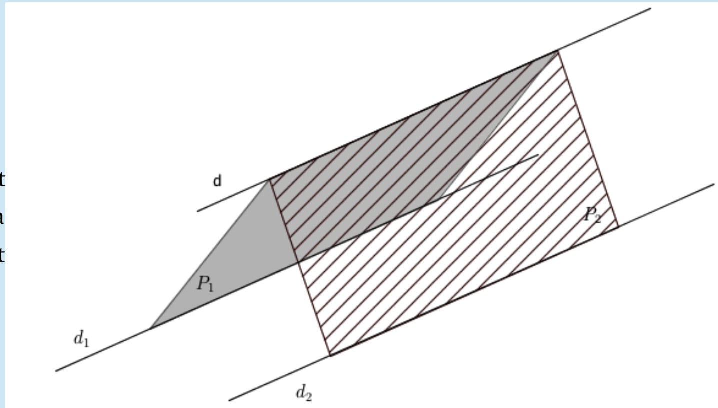
d'où $\arg(zz')$ = θ + θ' = $\arg(z) + \arg(z')$

Pour la démonstration 3, on procède par récurrence et pour la 4 comme pour la 1 et 2

IV- Géométrie dans l'espace

E1 Théorème du toit

Si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites parallèles alors la droite d'intersection des deux plans est parallèle à ces deux droites



Autrement dit

Si d_1 // d_2 avec $P_1 \cap P_2$ = d alors d // d_1 // d_2

Démonstration :

Premier cas : d_1 et d_2 confondues

d_1 est dans P_1 et P_2 donc $d_1 = d$ et donc d // d_1 // d_2

Deuxième cas : d_1 et d_2 distinctes

On raisonne par l'absurde en supposant que les droites d_2 et d sont sécantes en un point M.
Le point M appartenant à d, il appartient aussi à P_1 .
La droite d_2 est donc sécante à P_1 en un point M n'appartenant pas à la droite d_1 donc d_2 et d_1 sont non coplanaires ce qui contredit l'hyptohèse selon laquelle d_1 // d_2

E2 Droite orthogonale à un plan

Une droite d est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan

<u>**Pré-requis :**</u> *Connaitre la définition d'une droite orthogonale à un plan*

Démonstration

⇒ Soit d une droite orthogonale à un plan. Par définition elle est orthogonale à toute droite de ce plan donc à deux deux droites sécantes

Réciproquement

Soit d une droite orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 d'un plan P.

Considérons alors les vecteurs directeurs de ces droites : $\vec{u}$ pour d , $\vec{u_1}$ pour d_1 et $\vec{u_2}$ pour d_2

- On a donc $\vec{u}\cdot\vec{u_1}$ = 0 et $\vec{u}\cdot\vec{u_2}$ = 0 (car d ⊥ d_1 et d ⊥ d_2)
- Les droites d_1 et d_2 étant sécantes, les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ forment donc une base des vecteurs du plan P. Ainsi, si on considère une droite D du plan P de vecteur directeur $\vec{n}$, $\vec{n}$ se décompose selon $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ cad qu'il existe deux réels k_1 et k_2 tels que $\vec{n} = k_1 \vec{u_1} + k_2 \vec{u_2}$
- Calculons alors $\vec{u}\cdot\vec{n}$

  $\vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{u} .(k_1 \vec{u_1} + k_2 \vec{u_2}) = k_1 \vec{u}\cdot\vec{u_1} + k_2 \vec{u}\cdot\vec{u_2} = 0$ d'où d est orthogonale à D

E3 Equation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne d'un plan P est de la forme ax+by+cz+d=0 où a , b , c , d sont quatre réels avec (a,b,c) non tous nuls

Remarque : Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a , b , c) est alors un vecteur normal à ce plan

Démonstration

⇒ Soit A un point appartenant au plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal de P.

Un point M de coordonnées (x , y , z) appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ c'est à dire :

$$(x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b+(z-z_A)\times c=0$$

$$ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$$

d'où en posant d = $-ax_A-by_B-cz_C$ il vient :

$$ax+by+cz+d=0$$

Réciproquement

Considérons l'équation ax+by+cz+d=0 avec a , b , c , non tous nuls

On peut alors supposer que a est non nul. Les coordonnées du point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifient alors l'équation

Soit M un point quelconque de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) vérifient l'équation. On a donc

$(ax+by+cz+d)-(ax_A+by_A+cz_A+d)=0$ cad

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ cad

En posant $\vec{n}$ (a , b , c) , on a donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}$ = 0 ce qui traduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux pour tout point M donc M est dans le plan passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$

V- Probabilité et statistique

P1 Indépendance

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi

__Pré-requis :__ *la définiton de l'indépendance : A et B indépendants ssi P(A ∩ B) =* $P(A)\times P(B)$

Démonstration

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers . L'événement B est donc réalisé dés que A∩B ou $\overline{A}$ ∩B le sont donc d'après les probabilités totales, on a : P(A∩B) + P($\overline{A}$ ∩B) = P(B) d'où comme P(A∩B) = $P(A)\times P(B)$, on obtient : P($\overline{A}$ ∩B)= $P(B)-P(A)\times P(B)$ = $P(B)(1-P(A))$ = $P(B)\times P(\overline{A})$

B et $\overline{A}$ sont donc indépendants

P2 Loi exponentielle ou loi à durée de vie sans vieillissement

Une variable aléatoire T suit une loi à durée de vie sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle c'est à dire si et et seulement si :

pour tout réels t et h positifs, $P_{T\geq t}(T\geq t+h)=P(T\geq h)$

Démonstration

On sait que $P(T\geq x)=1-P(0\leq T\leq x)$ = 1 - $\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx$ = 1 - $\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x$ = ... = $e^{-\lambda x}$

$$P_{T\geq t}(T\geq t+h) = \frac{P((T\geq t+h)\cap(T\geq t))}{P(T\geq t)} = \frac{P(T\geq t+h)}{P(T\geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T\geq h)$$

P3 Espérance d'une loi exponentielle

L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$

Démonstration

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Son espérance mathématique est donnée par : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f(t)=\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Soit g(t) = $t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ = $\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda g(t)$ on peut donc en « sortir » g(t) :

g(t) = $\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}-g'(t)}{\lambda}$. Une primitive de g est donc G(t) = $\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda^2}$ - $\frac{g(t)}{\lambda}$

Comme $f(t)$ = $\lambda g(t)$ une primitive de f est donc $\mathrm{F}(t)=\lambda\mathrm{G}(t)$ = $\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On a alors I = $\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ = $[\mathrm{F}(t)]_0^x$ = $\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ - $\frac{1}{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}$ = $\lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ = 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}$ = $\lim\limits_{\mathrm{Y}\to-\infty} \frac{\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{Y}}}{-\lambda}$ = 0 (limite du cours voir F2)

On obtient ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{I}$ = $\frac{1}{\lambda}$

P4 Probabilité d'un intervalle centré en 0

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite . Soit α un réel de l'intervalle]0;1[. Il existe un unique réel strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

On cherche un nombre x tel que $P(-x \leq Z \leq x) = 1-\alpha$.

- La fonction densité de Z étant continue, on peut définir la fonction F par F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ = P (Z ≤ x)

  F est donc une primitive de f : F' = f et comme f > 0 , F est donc strictement croissante

- $P(-x \leq Z \leq x) = P(Z \leq x) - P(Z \leq -x)$ = $P(Z \leq x) - P(Z \geq x)$ = $P(Z \leq x) - (1 - P(Z \leq x))$ = $2P(Z \leq x) - 1$

  On recherche donc x > 0 tel que $2P(Z \leq x) - 1$ = 1 - α ⇔ $P(Z \leq x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ⇔ F(x) = $1 - \frac{\alpha}{2}$

- Dressons alors le tableau de variation de la fonction F .

  On a F(0) = $\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ d'où F étant strictement croissante, on a le tableau de variation suivant :

x	0		+∞
f '(x)		+	
f(x)	1/2	↗	1

Or α ∈]0;1[⇔ $1 - \frac{\alpha}{2}$ ∈ $\left]\frac{1}{2};1\right[$

On termine en utilisant le théorème de la bijection :

F est continue et strictement croissante sur]0;+∞[et on a : F ( ] 0 ; +∞ [ ) = $\left]\frac{1}{2};1\right[$

Comme $1 - \frac{\alpha}{2}$ ∈ $\left]\frac{1}{2};1\right[$, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique u_α ∈]0;+∞[tel que

F(x) = $1 - \frac{\alpha}{2}$ CQFD

Remarque : Dans la pratique, pour calculer u_α , on exploite la symétrie de la courbe car on peut écrire :

P($-u_\alpha$ ≤ Z ≤ u_α) = 1 - 2 P(Z ≤ $-u_\alpha$)

d'où 1 - 2 P(Z ≤ $-u_\alpha$) = 1 - α donne P(Z ≤ $-u_\alpha$) = $\frac{\alpha}{2}$

P5 Intervalle de fluctuation

Pour tout nombre réel α dans l'intervalle]0;1[, il existe un unique réel positif u_α tel que la probabilité que la variable aléatoire fréquence F_n prenne ses valeurs dans l'intervalle I_n défini par $I_n = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ se rapproche de 1 – α quand la taille de l'échantillon n devient grande ce que l'on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = 1-\alpha$

Démonstration :

On rappelle que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p. A partir de cette variable aléatoire X_n, on peut définir la variable aléatoire Z_n par $Z_n = \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

D'après le théorème de Moivre-Laplace, on a pour tous nombres réels a et b (a < b) :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a\leq Z_n\leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Or la variable aléatoire Z_n s'exprime facilement à l'aide de la variable aléatoire fréquence F_n.

En effet on a : $Z_n = \frac{n\times\left(\frac{X_n}{n}-p\right)}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} = \frac{F_n-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$. Par conséquent, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p+a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leq F_n\leq p+b\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

De plus Z_n suivant une loi normale centrée réduite, on sait d'après P4 que pour tout $\alpha \in$]0;1[, il existe un unique réel positif u_α tel que $\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1-\alpha$

En prenant $a=-u_\alpha$ et $b=u_\alpha$ la propriété s'ensuit

P6 Intervalle de confiance

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n;p)$ où p est la proportion inconnue d'apparition d'un caractère et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la fréquence associée à X_n.

Alors, pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95

<u>A noter :</u> On suppose ici les conditions d'approximations remplies c'est à dire : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

Démonstration

On sait que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut être simplifié par : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

On a donc $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} - F_n \leq -p \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - F_n$$

$$F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On a donc $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$

VI- Enseignement de spécialité : Arithmétique

A1 Divisibilité

Si a divise b et a divise c alors a divise toute combinaison linéaire de b et c

A noter : *une combinaison linéaire de b et c est une écriture de la forme* $\alpha\, b + \beta\, c$ *où* α *et* β *sont deux entiers*

Démonstration

a divise b donc il existe un entier k tel que b = ka

a divise c donc il existe un entier k' tel que c = k'a

On a alors α b+ β c = α ka+ β k'a = (α k+ β k')a = Ka donc a divise α b+ β c

A2 Compatibilité des congruences avec les opérations

Soit a , b , c , d quatre entiers relatifs et n un entier naturel ≥ 2

Si a ≡ b (n) et c ≡ d (n) alors :

1. compatibilité avec l'addition : a+c ≡ b+d (n)
2. compatibilité avec la multiplication : $a\times c \equiv b\times d$ (n)
3. compatibilité avec les puissances : pour tout entier naturel k, $a^k \equiv b^k$ (n)

Pré-requis : *La définition de a ≡ b (n) ⇔* $a-b$ *multiple de n*

Démonstration 1 , 2

a ≡ b (n) donc $a-b$ est multiple de n c'est à dire il existe un entier k tel que $a-b=kn$ d'où a = b+kn

c ≡ d (n) donc $c-d$ est multiple de n c'est à dire il existe un entier k' tel que $c-d=k'n$ d'où c = d + k'n

Addition	Multiplication
$(a-b)+(c-d)=kn+k'n$ $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$ $(a+c)-(b+d)$ est donc multiple de n a+c ≡ b+d (n)	$ac=(b+kn)(d+k'n)$ $ac=bd+bk'n+dkn+kk'n^2$ $ac=bd+n(bk'+dk+kk'n)$ ac – bd est donc multiple de n ac ≡ bd (n)

Démonstration 3

Une démonstration classique par récurrence utilisant la règle du produit :

Initialisation :

$a^0=1$ et $b^0=1$ donc $a^0 \equiv b^0$ (n)

Supposons qu'il existe un entier k tel que $a^k \equiv b^k$ (n)

Démontrons alors que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}$ (n)

On sait que $a^k \equiv b^k$ (n) et a ≡ b (n) donc d'après la règle du produit $a^k\times a \equiv b^k\times b$ (n) c'est à dire $a^{k+1} \equiv b^{k+1}$ (n)

Conclusion : Si la relation est vraie au rang k elle l'est au rang k+1 or la relation est vraie au rang 0 donc par hérédité , elle l'est pour tout k ≥ 0

A3 Théorème de Bezout

Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que au+bv=1

Pré-requis : *l'identité (ou égalité) de Bezout : si PGCD(a;b)=D alors il existe deux entiers u et v tels que au+bv=D*

Démonstration

⇒ si a et b premiers entre eux alors PGCD(a;b) = 1 d'où l'identité de Bezout permet de conclure

Réciproquement

supposons qu'il existe deux entiers u et v tel que au+bv=1

Soit D = PGCD (a;b) D divisie a et D divise b donc D divise toute combinaison linéaire de a et b en particulier D divise au+bv c'est à dire D divise 1 d'où D = 1 et a et b sont premiers entre eux

A4 Théorème de Gauss

soient a , b , c trois entiers relatifs

Si a divise le produit bc et si a est premier avec b alors a divise c

Pré-requis *Le théorème de Bezout*

Démonstration

a et b sont premier entre eux donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tel que au+bv=1. En multipliant par c ≠ 0 , il vient auc+bcv=c d'où comme a divise bc, a divise bcv et auc donc a divise auc+bcv c'est à dire a divise c

A5 Existence de solutions à une équation diophantienne

L'équation ax+by=c admet des solutions si et seulement si PGCD(a;b) divise c

Pré-requis : *l'identité (ou égalité) de Bezout*

Démonstration

⇒ si l'équation ax+by=c admet des solutions, comme le PGCD de a et b divise a et b il divise ax+by c'est à dire c

réciproquement

Si D = PGCD(a;b) divise c, il existe k tel que c = kD

d'après l'identité de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=\mathrm{D}$ d'où en multipliant par k ≠ 0 , il vient : $aku+bkv=k\mathrm{D}=c$, le couple (x ; y) = (ku ; kv) est donc solution de l'équation $ax+by=c$

A6 Infinité des nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers

Démonstration

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre fini de nombres premiers noté p_1 , p_2 , ... , p_n

On considère alors le nombre E = $p_1\times p_2\times\ldots\times p_n+1$.

Soit k un entier tel que 1 ≤ k ≤ n et montrons alors que E et p_k sont premier entre eux.

On a E = $p_1\times p_2\times\ldots\times p_k\times\ldots\times p_n+1$ d'où $\mathrm{E}-p_1\times p_2\times\ldots\times p_k\times p_n=1$.

On obtient donc une égalité du type $a\mathrm{E}+bp_k=1$ avec a = 1 et b = $-p_1\times p_2\times\ldots\times p_{k-1}\times p_{k+1}\times\ldots\times p_n$ donc d'après le théorème de Bezout, E et p_k sont premiers entre eux. Or si les nombres premiers sont en nombres finis, E doit être divisible par l'un d'entre eux. D'où la contradiction et les nombres premiers sont en nombre infini