DS 3 Terminale S Limites de suites

Le Mardi 15 octobre 2019

Exercice 1 (3 points):

Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs

a) Si pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$ alors la suite (u_n) converge

Faux contre exemple : $u_n = 2+(-1)^n$ suite à termes strict positifs et majorée par 5 mais qui ne converge pas

b) Si pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n}{2}$ alors la suite diverge

Vraie c'est une simple application des th de comparaison la lim de u_n est +∞

Exercice 2 (6 points) :

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ facile la limite est $\frac{2}{3}$

b) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n = n-\sqrt{n}+3 = n\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{3}{n}\right) = n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}\right)$ la lim est +∞

c) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n = -1+\frac{\cos n}{n}$

$-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-1-\frac{1}{n} \leq u_n \leq -1+\frac{1}{n}$ + th des gendarmes limite -1

d) Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n-3^n = 4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ de limite +∞

Exercice 3 (11 points): Evolution d'une population animale

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Cette population est estimée à 12 000 individus en 2017.

Le biologiste modélise l'évolution de cette population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et

pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -\frac{1}{180}u_n^2+1{,}25\,u_n$

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{180}x^2+1{,}25\,x$

a) Justifier que f est croissante sur [0;50]

$f'(x) = \frac{-x}{90}+1{,}25$ de racine 112,5 donc f' est positif sur]-∞;112 ,5] d'où la réponse

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$

Equation du second degré classique on trouve deux solutions : 0 et 45

2) On remarquera que $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Calculer la valeur de u_1 . Interpréter

$u_1=-\frac{1}{180}u_0^2+1{,}25\times u_0$ = 14,2 donc population de 14200 individus après un an

b) Démontrer par récurrence que : pour tout n ∈ ℕ , $0\leq u_n\leq 45$

$u_0=12$ donc OK

SQ $0\leq u_n\leq 45$ et DQ $0\leq u_{n+1}\leq 45$

$0\leq u_n\leq 45$ et comme f est croissante elle conserve l'ordre d'où

$f(0)\leq f(u_n)\leq f(45)$ ce qui donne

$0\leq u_{n+1}\leq 45$

cqfd

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{180}u_n^2+0{,}25\,u_n = -\frac{1}{180}u_n(u_n-45)$

on sait que u_n est positif que u_n <45 donc on en déduit le signe de $u_{n+1}-u_n$ ≥0 donc suite croissante

d) En déduire que (u_n) converge

Suite croissante majorée donc convergente

e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie f(ℓ) = ℓ . En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice

d'après la question 1) b) la limite est 45 donc la population ne dépassera pas les 45000 individus

3) a) Le biologiste souhaite connaître le nombre d'année au bout duquel la population dépassera les 42 000 individus . Ecrire un algorithme permettant de trouver le plus petit entier N tel que $u_N>42$.

12 ← u

0 ← n

Tant que u<42 faire

    n+1 ← n

    $-\frac{1}{180}u^2+1{,}25\,u$ ← u

Fin Tant que

Afficher u

b) Déterminer N à l'aide de votre calculatrice

N = 15