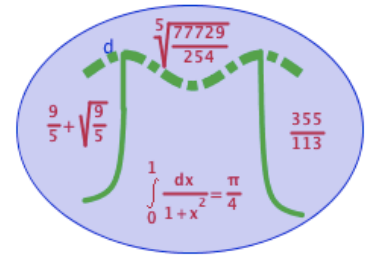


DS 3 Terminale S Limites de suites

Le Mardi 15 octobre 2019



Exercice 1 (3 points):

Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs

a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$ alors la suite (u_n) converge

Faux contre exemple : $u_n = 2 + (-1)^n$ suite à termes strict positifs et majorée par 5 mais qui ne converge pas

b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n}{2}$ alors la suite diverge

Vraie c'est une simple application des th de comparaison la lim de u_n est $+\infty$

Exercice 2 (6 points) :

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ facile la limite est $\frac{2}{3}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n - \sqrt{n} + 3 = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{3}{n} \right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n} \right)$ la lim est $+\infty$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + \frac{\cos n}{n}$

$-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n}$ + th des gendarmes limite -1

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - 3^n = 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$ de limite $+\infty$

Exercice 3 (11 points): Evolution d'une population animale

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2017.

Le biologiste modélise l'évolution de cette population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et

pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -\frac{1}{180} u_n^2 + 1,25 u_n$

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{180} x^2 + 1,25 x$

a) Justifier que f est croissante sur $[0; 50]$

$f'(x) = \frac{-x}{90} + 1,25$ de racine 112,5 donc f' est positif sur $]-\infty; 112,5]$ d'où la réponse

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$

Equation du second degré classique on trouve deux solutions : 0 et 45

2) On remarquera que $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Calculer la valeur de u_1 . Interpréter

$$u_1 = -\frac{1}{180} u_0^2 + 1,25 \times u_0 = 14,2 \text{ donc population de 14200 individus après un an}$$

b) Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 45$

$$u_0 = 12 \text{ donc OK}$$

SQ $0 \leq u_n \leq 45$ et DQ $0 \leq u_{n+1} \leq 45$

$0 \leq u_n \leq 45$ et comme f est croissante elle conserve l'ordre d'où

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(45) \text{ ce qui donne}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 45$$

cqfd

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{180} u_n^2 + 0,25 u_n = -\frac{1}{180} u_n (u_n - 45)$$

on sait que u_n est positif que $u_n < 45$ donc on en déduit le signe de $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc suite croissante

d) En déduire que (u_n) converge

Suite croissante majorée donc convergente

e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice

d'après la question 1) b) la limite est 45 donc la population ne dépassera pas les 45000 individus

- 3) a) Le biologiste souhaite connaître le nombre d'année au bout duquel la population dépassera les 42 000 individus. Ecrire un algorithme permettant de trouver le plus petit entier N tel que $u_N > 42$.

```
12 ← u
```

```
0 ← n
```

```
Tant que u < 42 faire
```

```
    n+1 ← n
```

$$-\frac{1}{180} u^2 + 1,25 u \leftarrow u$$

```
Fin Tant que
```

```
Afficher u
```

b) Déterminer N à l'aide de votre calculatrice

$$N = 15$$