DS 1 Terminale S1

Lundi 17 septembre
2 heures
calculatrice autorisée

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}$

1) a) Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 , u_3

$u_1=2$, $u_2=\frac{5}{2}$, $u_3=\frac{11}{4}$

b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n)

la suite semble croissante car $u_0<u_1<u_2<u_3$

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1\leq u_n\leq 3$

initialisation :

$u_0=1$ donc $-1\leq u_0\leq 3$

La relation est vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $-1\leq u_n\leq 3$

DQ $-1\leq u_{n+1}\leq 3$

on sait que $-1\leq u_n\leq 3$

$\frac{-1}{2}\leq \frac{1}{2}u_n\leq \frac{3}{2}$

$1\leq \frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}\leq 3$

-1 ≤ $1\leq u_{n+1}\leq 3$

Conclusion : Si la relation est vraie au rang n, la relation est donc vraie au rang n+1
or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité : pour tout n ∈ ℕ , $-1\leq u_n\leq 3$

d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}-u_n = -\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2} = \frac{3-u_n}{2}$$

Comme on sait que $u_n\leq 3$, on a donc $3-u_n$ positif d'où $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ie $u_{n+1}\geq u_n$ donc suite croissante

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-3$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}-3 = \frac{1}{2}u_n-\frac{3}{2} = \frac{u_n-3}{2} = \frac{v_n}{2}$ donc géométrique raison ½ et de premier terme $v_0=u_0-3=-2$

b) En déduire une expression de (v_n) en fonction de n

Le cours donne $v_n=v_0\times q^n$ $v_n=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Exprimer alors u_n en fonction de n

$u_n-3=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $u_n=3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) Calculer la valeur exacte de la somme notée S des cent premiers termes de la suite (u_n)

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{99} = 3-2\times1+3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$$

$$= 100\times3-2\times\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\right)$$

$$= 300-2\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 300-4\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right) = 296+\left(\frac{1}{2}\right)^{98}$$

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{2}{2n+1}$

Initialisation : n = 0

$u_0=2$ et $\frac{2}{2\times 0+1}=2$ donc relation vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $u_n=\frac{2}{2n+1}$ et DQ $u_{n+1}=\frac{2}{2(n+1)+1}=\frac{2}{2n+3}$

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3} \quad \text{CQFD}$$

On termine la récurrence

Exercice 3 :

Partie A

k varie de 0 à 2 donc

k = 0 : U = $3\times 0-2\times 0+3 = 3$

k = 1 : U = $3\times 3-2\times 1+3 = 10$ et

k = 2 : U = $3\times 10-2\times 2+3 = 29$

L'affichage est donc 29

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=3u_n-2n+3 \end{cases}$

1) **Initialisation :** n=0 $u_0=0$ donc $u_0\geq 0$ relation vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n\geq n$ et D Q $u_{n+1}\geq n+1$

$u_n\geq n$ donc $3u_n\geq 3n$ d'où $3u_n-2n+3\geq 3n-2n+3$ cad $u_{n+1}\geq n+3$

Comme n+3 = n+1+2 ≥ n+1 on en déduit que $u_{n+1}\geq n+1$

On termine alors la récurrence

2) Etudions le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$u_{n+1}-u_n = 3u_n-2n+3-u_n = 2u_n-2n+3 = 2(u_n-n)+3$

Comme on sait que $u_n\geq n$ on a $u_n-n \geq 0$ d'où $2(u_n-n)+3\geq 0$ c'est dire $u_{n+1}-u_n\geq 0$ donc $u_{n+1}\geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-n+1$

a) $v_{n+1} = u_{n+1}-(n+1)+1 = 3u_n-2n+3-n = 3u_n-3n+3 = 3(u_n-n+1) = 3v_n$ d'où (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=u_0-0+1=1$

b) D'après 3) a) on peut écrire $v_n=v_0\times q^n = 3^n$ d'où $u_n-n+1=3^n$ cad $u_n=3^n+n-1$

Exercice 4 : Après avoir déterminé son ensemble de définition, étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation . La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x^2+9x+12}{4x+4}$

$D_f = \mathbb{R} / \{-1\}$

f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition D_f

$$f'(x)=\frac{(2x+9)(4x+4)-(x^2+9x+12)\times 4}{(4x+4)^2} = \frac{4x^2+8x-12}{(4x+4)^2}$$

Pour tout $x \in D_f$, $(4x+4)^2$ est positif donc le signe de f' est celui de $4x^2+8x-12$ qui est du signe de a sauf entre ses racines . $\Delta=64-4\times4\times(-12) = 16^2 > 0$ donc deux racines $x_1=-3$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{4}$	↘	||	↘	$\frac{11}{4}$	↗	