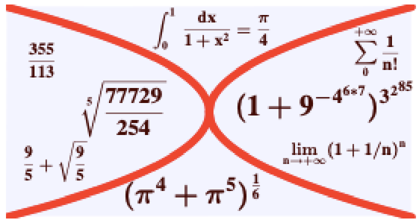
DM Terminale B Spe math



Soit la fonction f définie et dérivable sur ℝ par : $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$

On note C sa courbe représentative

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x)=e^x-xe^x+1$

1) Etudier les variations de g

g est une somme de fonction dérivable sur r donc g est dérivable sur r et on a :

$g'(x)=e^x-(1\times e^x+x\times e^x) \;=\; -xe^x$

pour tout réel x , e^x est strictement positif, donc le signe de g' est celui de -x d'où :

- pour tout x positif, g' est négative et g décroissante
- pour tout x négatif, g' est positive et g croissante

2) Dresser le tableau de variations complet de g

Etude des limites :

- on sait de part les croissances comparées que $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ d'où comme $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ par somme

  on a $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$
- En +∞ , on a une FI donc on factorise $g(x)=(1-x)e^x+1$

  $\lim_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	1	↗	2	↘	$-\infty$

3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α .

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

- Sur]-∞;0], la fonction g est croissante et minorée par 1 donc l'équation g(x)=0 n'a pas de solution
- Sur [0;+∞[, g est décroissante et continue et on a g([0;+∞[)=]-∞;2].

  Comme 0 ∈ [-∞;2], d'après le th de la bijection, il existe une unique réel α ∈ [0;+∞[
- l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution α
- La calculatrice donne α entre 1,27 et 1,28

4) Démontrer que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

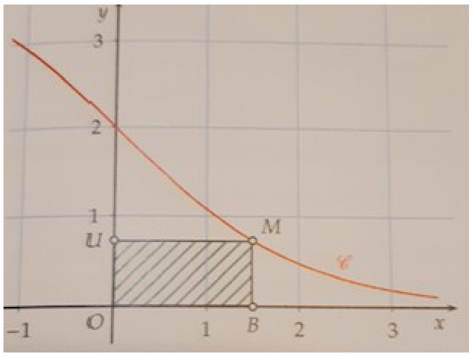
On sait que $g(\alpha)=0$ donc $e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1=0$ $\quad e^{\alpha}(1-\alpha)=-1$ et $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

5) Etudier le signe de g

g est positive sur $]-\infty;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;+\infty[$

Partie B

Soit M un point de C et les projetés B et U de M sur les axes du repère (voir figure)



1) Soit A la fonction qui à tout x ∈ $\mathbb{R}^+$, associe l'aire du rectangle BOUM

a) Déterminer A(x)

$$A(x)=OB\times BM=x\times f(x)=x\times\frac{4}{e^{x}+1}=\frac{4x}{e^{x}+1}$$

b) Déterminer les variations de A

$$A'(x)=\frac{4(e^{x}+1)-4xe^{x}}{(e^{x}+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^{x}+1)^2}$$

2) Montrer que l'aire du rectangle BOUM est maximale lorsque M a pour abscisse α

Le signe de A' est celui de g(x) donc d'après la question partie A 5, on en déduit que A' est positive sur $]-\infty;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;+\infty[$ d'où A est croissante puis décroissante et admet un maximum en x = α

Déterminer un encadrement de cette aire maximale déduit de celui de α obtenue à la partie A

$1{,}27<\alpha<1{,}28$ donc la fonction expo étant croissante elle conserve l'ordre et $e^{1{,}27}<e^{\alpha}<e^{1{,}28}$ d'où

$1+e^{1{,}27}<1+e^{\alpha}<1+e^{1{,}28}$. On a donc par inverse : $\frac{1}{1+e^{1{,}28}}<\frac{1}{1+e^{\alpha}}<\frac{1}{1+e^{1{,}27}}$ d'où

$\frac{4\times 1{,}27}{1+e^{1{,}28}}<A(\alpha)<\frac{4\times 1{,}28}{1+e^{1{,}27}}$ c'est à dire $1{,}10<A(\alpha)<1{,}12$

3) Démontrer que la tangente à C au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU)

$$f'(x)=\frac{-4e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$$

droite parallèle donc coefficient directeur égaux

- coefficient directeur de la tangente : $f'(\alpha) = \frac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2}$
- B a pour coordonnées $(\alpha;0)$ et U $(0;f(\alpha))$

  coefficient directeur de (BU) : a = $\frac{y_B-y_U}{x_B-x_U} = \frac{0-f(\alpha)}{\alpha-0} = -\frac{4}{\alpha(1+e^{\alpha})}$
- On sait que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ d'où $1+e^{\alpha}$ =...= $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où

$f'(\alpha) = \dfrac{\dfrac{-4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$ et a = $-\dfrac{4}{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$ d'où les droites parallèles