Bac Blanc Classe de Terminale

Epreuve de Spécialité Mathématiques

Mercredi 4 novembre 2020

Durée 4 heures

Merci de recopier dans l'entête de la copie ce qui suit :
Exercice 1 : / 2 Exercice 2 : / 4 Exercice 3 : / 5 Exercice 4 : / 5 exercice 5 : / 4

Exercice 1 (2 points) :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$.

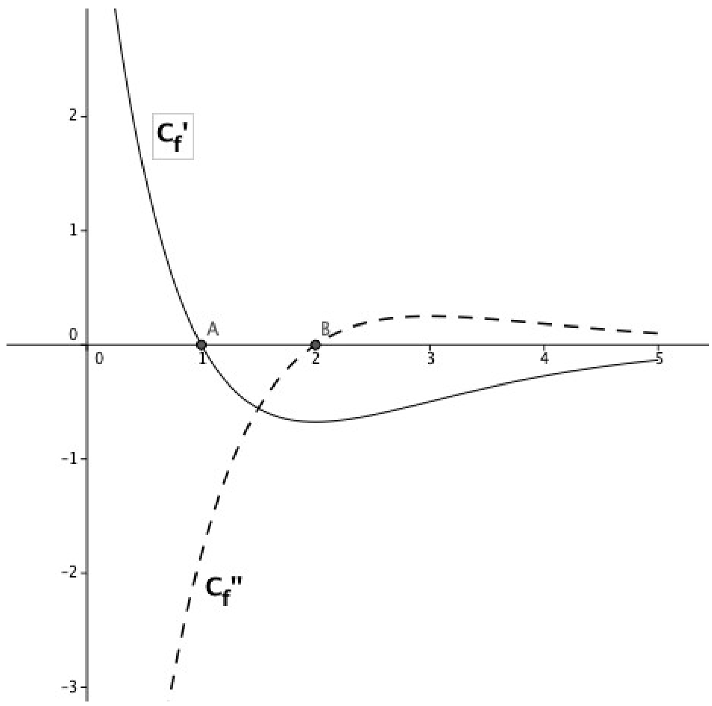
On a représenté ci-dessous la courbe (C_f') de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe (C_f'') de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0;5]$

Le point A de coordonnées $(1;0)$ appartient à (C_f') et le point B de coordonnées $(2;0)$ appartient à la courbe (C_f'')

A l'aide de ce graphique, répondre aux questions suivantes :

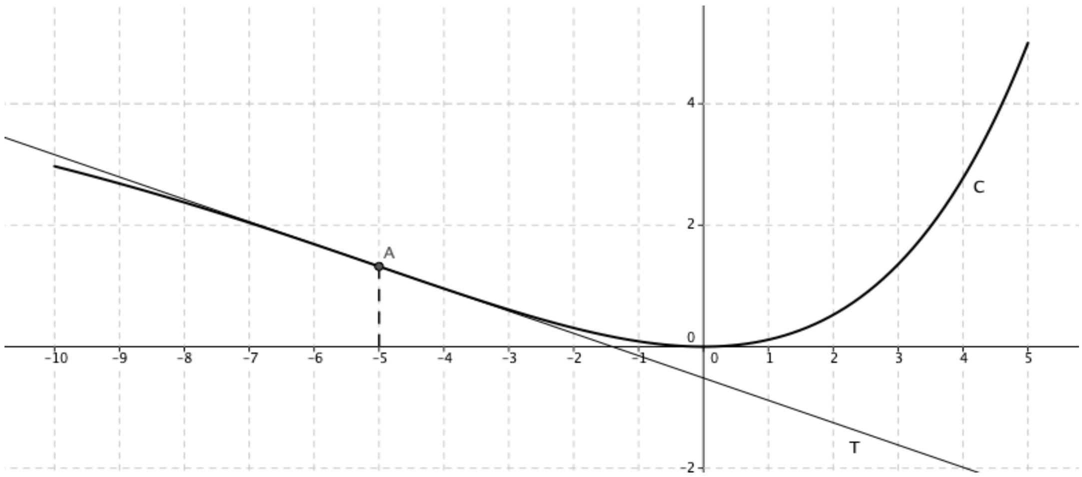
1) Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier
2) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe. Justifier
3) La courbe f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier
4) On sait que $f(0)=0$ et f(1) ≈ 1,8 et f(2) ≈ 1,35

   Construire une courbe qui pourrait être celle de f



Exercice 2 (4 points) :

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous, la courbe C représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;5]$ et la tangente T à C au point A .



PARTIE A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique

Cette partie A est un QCM où pour chacune des questions une seule des quatre réponses est exacte . Aucune justification n'est demandée.

1) Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est : a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) 3 d) $\frac{1}{3}$
2) La fonction semble :
   a) concave sur $[-5;0]$ b) concave sur $[-10;0]$
   c) convexe sur $[-10;5]$ d) convexe sur $[-5;5]$

PARTIE B

La fonction f précédente est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-10;5]$ par :

$$f(x)=(x-5)e^{0,2x}+5$$

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$
   a) Montrer que $f'(x)=0,2\,x\,e^{0,2x}$
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$
   c) Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à C au point A d'abscisse -5
2) a) Calculer $f''(x)$ la dérivée seconde de f
   b) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [-5;10]

Exercice 3 (5 points) : Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un math. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les événements :

- M : « le téléspectateur a regardé le match »
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission »

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1) Construire un arbre pondéré illustrant la situation
2) Déterminer la probabilité $M \cap E$.
3) a) Vérifier que $p(E)=0{,}44\,x+0{,}14$
   b) En déduire la valeur de x
4) Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'il ait regardé le match ?

PARTIE B

Dans l'entrepôt d'une usine , des maillots bleus et des maillots rouges sont stockés dans un carton. La proportion de maillots bleus est égale à 0,55.

1) Jeanne prend au hasard 10 maillots dans ce carton pour offrir à un groupe de VIP qui est venu visiter l'usine. Le nombre de maillots présents dans le carton est suffisamment grand pour que le tirages soient considérés comme identiques et indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de maillots bleus.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier soigneusement la réponse
   b) Calculer la probabilité que Jeanne tire exactement huit maillots bleus (on arrondira le résultat au millième prés)
   c) Calculer la probabilité que Jeanne tire au moins deux maillots bleus (on arrondira le résultat au millième prés)

2) Jeanne prend toujours au hasard des maillots dans le carton . La proportion de maillots bleus est toujours de 0,55 . Combien Jeanne doit-elle prendre de maillots, au minimum, pour que la probabilité d'avoir au moins un maillot bleu soit supérieure ou égale à 0,9999 ?

Exercice 4 (5 points) :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \end{cases}$

Partie A

1) Déterminer la valeur exacte de u_1 et u_2

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

4) En déduire que la suite (u_n) est décroissante

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1) a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et déterminer le premier terme v_0

b) Exprimer v_n en fonction de v_0

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$

2) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Partie C

On considère la fonction en langage python suivante :

def **limite**(p) :
    u = 5
    n = 0
    while u ≥ $1 + 10^{-p}$:
        n = n+1
        u = $3 - \dfrac{10}{u+4}$
    return n

1) Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console **limite(2)** ?
2) Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelque soit la valeur de l'entier naturel p entré en argument ?

<u>Exercice 5 (4 points) :</u>

Partie A

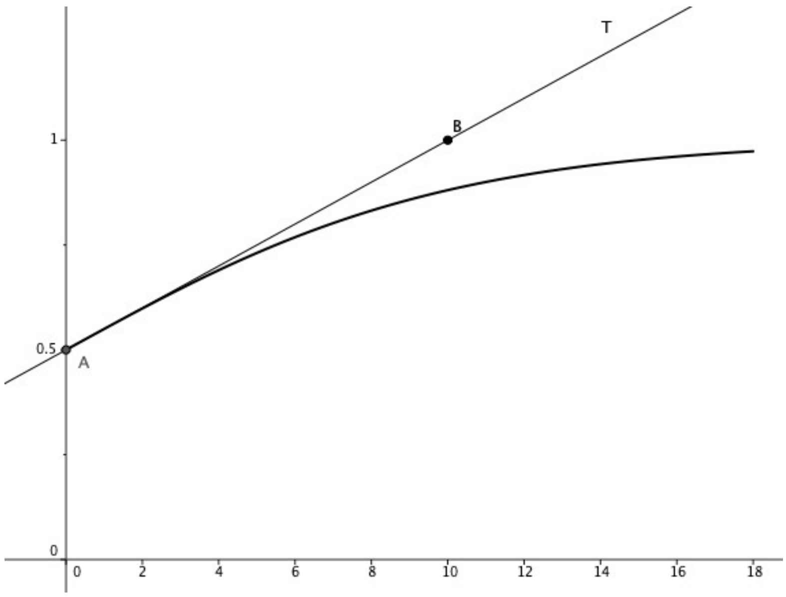
Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{a}{1+e^{-bx}}$$

La courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donné ci-contre.

La courbe C_f passe par le point $A(0;0,5)$.

La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10;1)$



1) Justifier que a = 1 . On obtient alors pour tout réel $x \geq 0$, $f(x)=\frac{1}{1+e^{-bx}}$

2) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x)=\frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

3) Justifier que T a pour coefficient directeur $\frac{1}{20}$ et en déduire alors la valeur de b

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $p(x)=\frac{1}{1+e^{-0,2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er Janvier 2 000 .

Le nombre p(x) modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, p(0) est la proportion d'individus équipés au 1er Janvier 2 000 et p(3,5) est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1) Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er Janvier 2010 ? On donnera un valeur approchée arrondie au centième.
2) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3) On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 90 % , le marché est saturé.

   a) Démontrer que trouver l'année où le marché est saturé revient à résoudre l'inéquation $e^{-0,2x}<\frac{1}{9}$

   b) En considérant que $\frac{1}{9} \approx e^{-2,2}$, déterminer l'année où le marché est saturé.

4) a) Déterminer $p''(x)$ pour tout réel x.

b) Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier .