Chapitre 4 : Limites de suites

- **Suites**

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ln(2), etc.

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

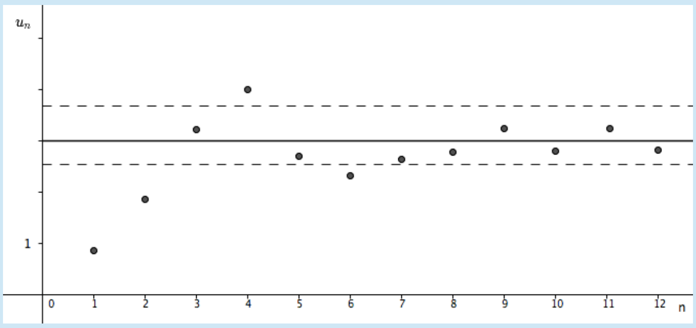
I- Limite d'une suite

a) Limite finie

Définition Soit (U_n) une suite de nombres réels.

On dit que la suite (U_n) admet pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$, lorsque **tout intervalle**]a ;b[contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est **convergente vers ℓ** et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

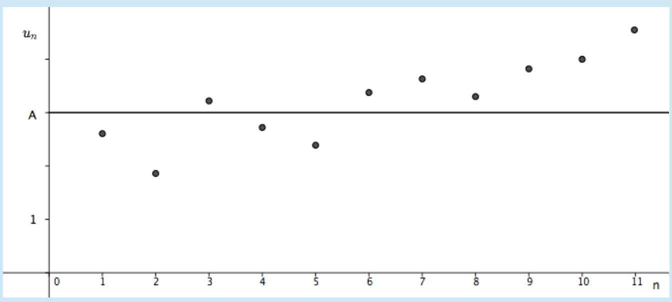


b) Limite infinie

Définitions

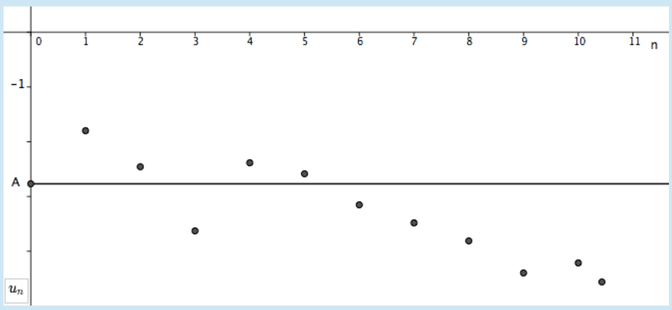
Soit (u_n) une suite de nombres réels et A un réel.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang



Soit (u_n) une suite de nombres réels et A un réel.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang



Remarques :

- Une suite convergente ne possède qu'une seule limite (voir démonstration en III)
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente et sa limite est $+\infty$, $-\infty$ ou pas de limite
- Ces définitions seront très utiles dès qu'il faudra démontrer des propriétés sur les limites de suites. Cependant dans la pratique, il existe des méthodes plus intuitives pour déterminer une limite :

II- Opérations sur les limites

a) Limites d'une somme

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite u_n+v_n admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n$ / $\lim v_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

b) Limite d'un produit

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite $u_n \times v_n$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n$ / $\lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0				
$+\infty$				
$-\infty$				

c) Limite d'un quotient

Les suites (u_n) et (v_n) ayant une limite (finie ou infinie), la suite $\frac{u_n}{v_n}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous :

$\lim u_n$ / $\lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0				
$+\infty$				
$-\infty$				

d) Des limites à connaître

- Compléter les limites suivantes qui utilise votre bon sens :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} =$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n =$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n =$

III) Propriétés sur les limites

Théorème 2 (BAC) :

1. Si (U_n) est une suite croissante et converge vers un réel ℓ alors elle est majorée par ℓ
2. Si (U_n) est une suite décroissante et converge vers un réel ℓ alors elle est minorée par ℓ

Démonstration : Raisonnons par l'absurde

IV- Les théorèmes des gendarmes et de comparaison

a) Le théorème des gendarmes (Admis)

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques vérifiant à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

Un théorème très utile pour déterminer une limite car il est fréquent d'encadrer une suite par deux autres qui sont convergentes

Exemple : Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

b) Les théorèmes de comparaison

Les théorèmes de comparaison (BAC) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du 1) A FAIRE

V- Suites de type q^n

> **Théorème (BAC)** Soit la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$,avec $q \in \mathbb{R}$.
> - Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
> - Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
> - Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
> - Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite

Exemples : Compléter : $\lim_{n\to+\infty} 3^n =$ car . $\lim_{n\to+\infty} 0{,}2^n =$ car

Démonstration (BAC) : $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ quand $q > 1$

On utilise pour cela **l'inégalité de Bernoulli** :

pour tout n et pour tout $a > 0$, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$

Remarque : Ce théorème est utile pour déterminer la limite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 car on sait alors $u_n = u_0 \times q^n$ d'où selon le signe de u_0 et la valeur de q on peut en déduire la limite de la suite (u_n)

VI- Théorèmes de convergence monotone

Théorème (BAC)

- Si (U_n) est une suite **croissante et non majorée** alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si (U_n) est une suite **décroissante et non minorée** alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration : la première à faire

Théorème (admis)

- Si (U_n) est une suite **croissante et majorée** alors elle converge
- Si (U_n) est une suite **décroissante et minorée** alors elle converge

Un théorème très utile pour assurer la convergence d'une suite . Cependant, il a ses limites car il ne nous renseigne pas sur la valeur de cette limite