Exercice Centres étrangers (juin 2010)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle **[0;+∞[** par $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Etude de propriétés de la fonction f

a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0;+∞[

b) Résoudre sur l'intervalle [0;+∞[l'équation f(x) = x . On note α la solution

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0;\alpha[$ alors f(x) appartient à l'intervalle $[0;\alpha[$

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ alors f(x) appartient à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$

2) Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère a suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_n+1=f(u_n)=6-\frac{5}{u_n+1}$

a) Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations y = x et y = f(x) . Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0;0)$ et en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1,A_2,A_3,A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1 , u_2, u_3 , u_4.

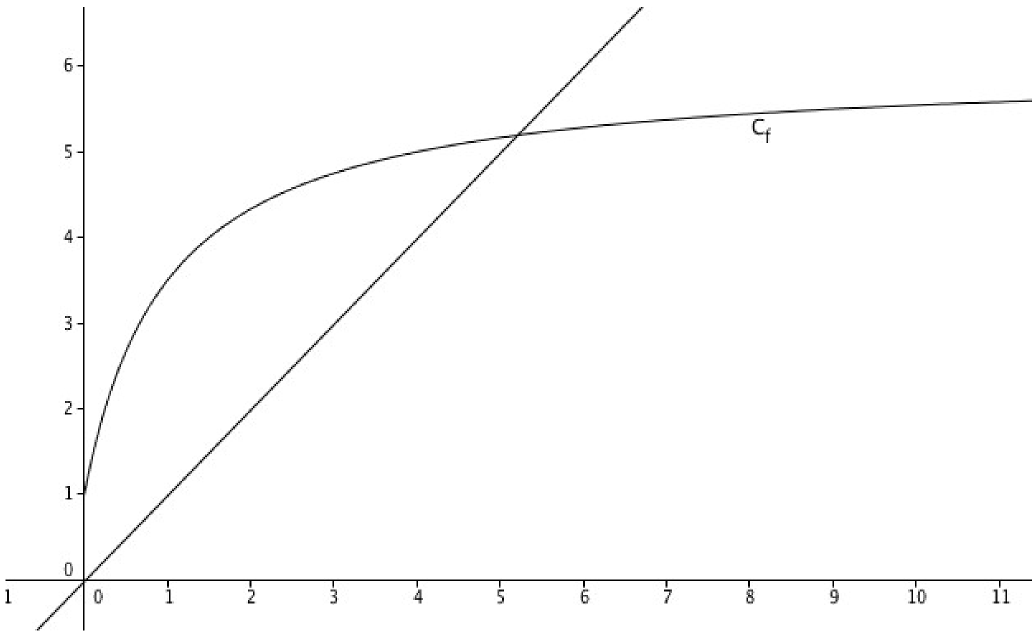
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même no fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



Corrigé

1) a) On a $f(x) = \frac{6x+1}{x+1}$ donc f est une fonction homographique . Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition

c'est à dire $\mathbb{R}^+$. On a : $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ d'où $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $x + 1 \neq 0$ d'où $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{6x+1}{x+1}=x \Leftrightarrow 6x + 1 = x^2+x \Leftrightarrow x^2-5x-1=0$

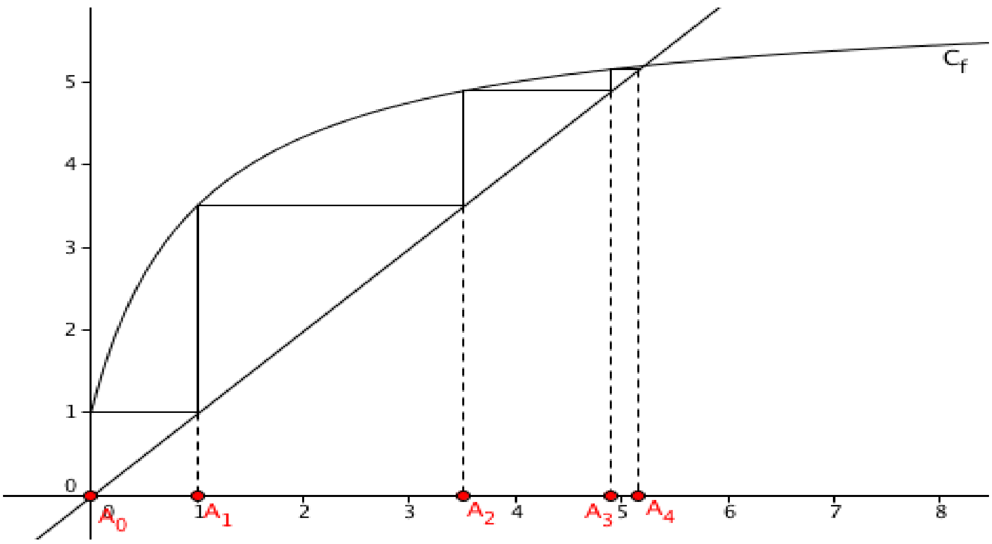
$\Delta = 25+4 = 29 > 0$ donc deux solutions $x_1 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$.

Comme $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

c) $[0;\alpha[\subset \mathbb{R}^+$ or f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc elle conserve l'ordre cad : $0 \le x < \alpha \Leftrightarrow f(0) \le f(x) < f(\alpha)$ avec $f(0)=1$ et $f(\alpha)=\alpha$ d'où $1 \le f(x) < \alpha$ d'où $f(x) \in [0;\alpha[$.

De même, pour $x \ge \alpha$, comme f est croissante, on a $f(x) \ge f(\alpha)$ cad $f(x) \ge \alpha$ d'où pour $x \ge \alpha$, $f(x) \in [\alpha;+\infty[$

2)a) D'après le graphique, la suite (u_n) semble croissante et convergente vers α



b)**Initialisation :** $u_1 = \frac{6u_0+1}{u_0+1} = 1$ d'où $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ La relation est vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier n pour lequel $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

Démontrons alors que : $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$

D'après l'hypothèse de récurrence et comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(\alpha)$ c'est à dire $1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$ d'où $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$ CQFD

Conclusion: Si la relation est vraie au rang n , elle l'est au rang n+1 or la relation est vraie au rang 0 donc par hérédité , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

c) On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par α donc elle converge vers l.

La fonction f étant continue sur $[0; \alpha[$, l vérifie : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l) \Rightarrow f(l)=l$

Or seul α vérifie $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$ d'où $l = \alpha$.

3)

- Si $u_0 \in [0;\alpha[$, la suite (u_n) est croissante et converge vers α .
- Si $u_0 = \alpha$, la suite u_n est constante et égale à α
- Si $u_0 \in]\alpha;+\infty[$, la suite u_n est décroissante et converge vers α

Les démonstrations se font de la même manière que pour $u_0 = 0$