D'après sujet de baccalauréat

On considère dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (–1 ; 0)

1) Par tout point H du segment [AA'] distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overrightarrow{OH} = x\,\vec{i}$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction numérique définie [–1;+1] par f(x) = $(1-x)\sqrt{1-x^2}$ et soit C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

   a) Etudier la dérivabilité de f en +1 et en –1. En déduire les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses +1 et –1

   b) Justifier que f est dérivable sur]–1;1] puis dresser la tableau de variation de f

   c) Tracer la courbe C
3) Démontrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral
4) Justifier que l'équation f(x) = 1 admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$). Déterminer β et donner, en justifiant, une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de α .

Corrigé

1) Le cercle Γ a pour équation $x^2+y^2=1$. M et M ' ont pour abscisse x et pour ordonnée : y = ± $\sqrt{1-x^2}$. Ainsi, la distance MM' = 2 $\sqrt{1-x^2}$. *Il faut faire une figure pour visualiser la situation*

Avec pour base [MM'] et pour hauteur [AH] , le triangle AMM' a pour aire : $\dfrac{MM' \times AH}{2}$ cad $(1-x)\sqrt{1-x^2}$

2) a) **Dérivabilité de f en –1 :** Etude de $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$\lim\limits_{x\to -1} 1-x=2$ et $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{1-x}=\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{1+x} = 0^+$

par produit et quotient, on en déduit :

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$$

Comme cette limite n'existe pas, f n'est pas dérivable en –1

Dérivabilité de f en 1 : Etude de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x-1} = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

Comme cette limite existe , f est dérivable en 1 et on a f '(1) = 0

La courbe représentative de f admet donc une tangente horizontale en 1 et une tangente verticale en –1

b) La fonction $x \longrightarrow 1-x^2$ est strictement positive et dérivable sur] –1 ; 1 [, donc la fonction $x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur]–1;1[. Ainsi f est le produit de fonctions dérivables sur]–1;1[d'où f dérivable sur]–1;1[.
D'après la question précédente, on sait que f est dérivable en 1 mais pas en –1 d'où f est dérivable sur]–1 ; 1]

$(\sqrt{1-x^2})' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ on a donc f '(x) = $-1\sqrt{1-x^2}+(1-x)\times\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-1+x^2-x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

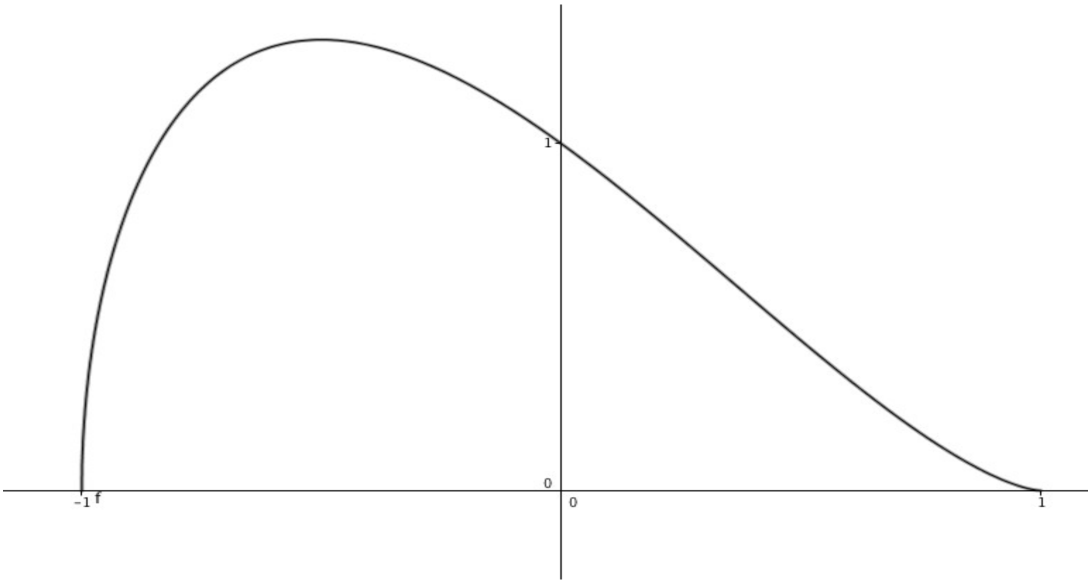
Pour tout x ∈]–1;1[, $\sqrt{1-x^2} > 0$ d'où le signe de f ' est celui de $2x^2-x-1$

$\Delta = 9 \Rightarrow$ deux racines $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

Pour tout x $\in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, $2x^2-x-1$ est du signe de 2 c'est à dire positif d'où f ' positive et f croissante

Pour tout x $\in \left]-\frac{1}{2};1\right[$, $2x^2-x-1$ est du signe de –2 cad négatif d'où f ' négative et f décroissante

x	–1		$-\frac{1}{2}$		1
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



4)

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right[$ et on a $f\left(\left[-1;-\frac{1}{2}\right[\right) = \left[0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right[$.

Comme $1 \in \left[0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right[$, d'après le théorème de la bijection , il existe un unique réel $\alpha \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right[$ tel que $f(\alpha)=1$

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et on a $f\left(\left[-\frac{1}{2};1\right[\right) = \left]0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right[$.

Comme $1 \in \left]0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right[$, d'après le théorème de la bijection , il existe un unique réel $\beta \in \left[-\frac{1}{2};1\right[$ tel que $f(\beta)=1$

<u>Conclusion :</u> L'équation f(x) = 1 admet deux solutions.

Comme f(0) = 1 on en déduit que $\beta = 0$ et la calculatrice donne $\alpha \approx -0{,}839$