Exercice 1 : Histoire

Proposer une explication de l'approximation de π par la méthode d'Archimède

Exercice 2 :

On considère les deux polynômes suivants : $P(x) = -x^3+7x^2-14x+8$ et $R(x) = x^2-7x+12$

1) Démontrer que 4 est une racine de P et R

P(4) = … = 0 et R(4) = … = 0

2) Déterminer les réels a , b puis les réels c et d tels que :

$$P(x) = (x-2)(x-4)(ax+b) \quad \text{et} \quad R(x) = (x-4)(cx+d)$$

$P(x) = (x-2)(x-4)(ax+b) = (x^2-6x+8)(ax+b) = ax^3+bx^2-6ax^2-6bx+8ax+8b$

$= ax^3+(b-6a)x^2+(-6b+8a)x+8b = -x^3+7x^2-14x+8$

On identifie alors les coefficients : $\begin{cases} a=-1 \\ b-6a=7 \\ -6b+8a=-14 \\ 8b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

$R(x) = (x-4)(cx+d) = cx^2+(d-4c)x-4d = x^2-7x+12$. On identifie alors les coefficients

$\begin{cases} c=1 \\ d-4c=-7 \\ -4d=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=-3 \end{cases}$

3) Résoudre l'inéquation $\dfrac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

Le quotient est défini pour $x \in \mathbb{R}/\{3;4\}$

$$\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{(x-2)(x-4)(-x+1)}{(x-4)(x-3)} = \frac{(x-2)(-x+1)}{(x-3)} \geq 0$$

x	-∞		1		2		3		4		+∞
Signe de x-2		–		–	0	+	||	+	||	+	
Signe de –x+1		+	0	–		–	||	–	||	–	
Signe de x–3		–		–		–	||	+	||	+	
Signe du quotient		+	0	–	0	+	||	–	||	–	

S =]–∞;1] ∪ [2;3[

Exercice 3 :

On considère l'équation (E) $(m-1)x^2-4mx+4m+1=0$ où m est un réel

En justifiant votre réponse, proposer un algorithme, en langage python, qui donne le nombre de solutions de l'équation (E) selon les valeurs de m .

- Dans le cas où m = 1 , l'équation devient -4x+5=0 donc x = 5/4 et une solution
- Pour m ≠ 1

  Le nombre de solutions dépend du signe du discriminant

$\Delta = (-4m)^2-4\times(m-1)(4m+1) = \dots = 12m+4$

$\Delta>0 \Leftrightarrow 12m+4>0 \Leftrightarrow m>\frac{-1}{3}$

Ainsi on a deux solutions pour m > $-\frac{1}{3}$, une solution pour $m=-\frac{1}{3}$ aucune solution pour m < $-\frac{1}{3}$

<table>
<tr><td>Langage naturel</td><td>Langage python</td></tr>
<tr><td>
Variables : delta , m : nombres réels
Traitement :
lire m
Si m = 1 alors
afficher « l'équation a une unique solution »
Sinon
Si m > $-\frac{1}{3}$ alors
afficher « l'équation a deux solutions »
Sinon
Si m < $-\frac{1}{3}$ alors
afficher « l'équation n'a pas de solutions »
Sinon
afficher « l'équation a une unique solution »
</td><td>
m=int(input(« entrer la valeur de m »)
if m = = 1 :
print(" une unique solution ")
elif $m>-\frac{1}{3}$:
print("deux solutions ")
elif $m<-\frac{1}{3}$:
print("pas de solution")
else :
print(« une unique solution »)
</td></tr>
</table>

Exercice 4 : On modélise la trajectoire d'une fusée de feu d'artifice par l'arc de parabole représenté ci-contre.

On note h(t) la hauteur (en mètre) de la fusée en fonction du temps t (en seconde)

La fusée explose 5 secondes après son lancement.

Question : Si la fusée n'avait pas explosé, combien de temps après son lancement serait-elle tombée au sol ?

Le sommet de la parabole a pour coordonnées S (4 ; 80)

donc la fonction représentée qui est un polynôme du second degré

peut s'écrire : f(x) = $a(x-4)^2+80$ où a est un réel à déterminer .

Comme f(0) = 20 , on a donc $a(0-4)^2+80=20$ c'est à dire $16a=-60$ donc $a=-\frac{60}{16} = -\frac{15}{4}$

On a donc $f(x)=-\frac{15}{4}(x-4)^2+80 = -\frac{15}{4}x^2 + 30x + 20$

Pour répondre à la question , il faut donc résoudre f(x) = 0 cad $-\frac{15}{4}x^2+30x+20=0$

$\Delta=900+300=1200 > 0$ donc deux solutions :

$x_1=\frac{-30-\sqrt{1200}}{-\frac{15}{2}}$ ou $x_2=\frac{-30+\sqrt{1200}}{-\frac{15}{2}}$

$x_1 = \frac{2}{15}\times(30+20\sqrt{3})$ $x_2 = \frac{2}{15}\times(30-20\sqrt{3})$

$x_1=4+8\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 8{,}61$ $x_2=4-8\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}61$

La fusée serait donc retombée sur le sol 8,6 secondes après le départ